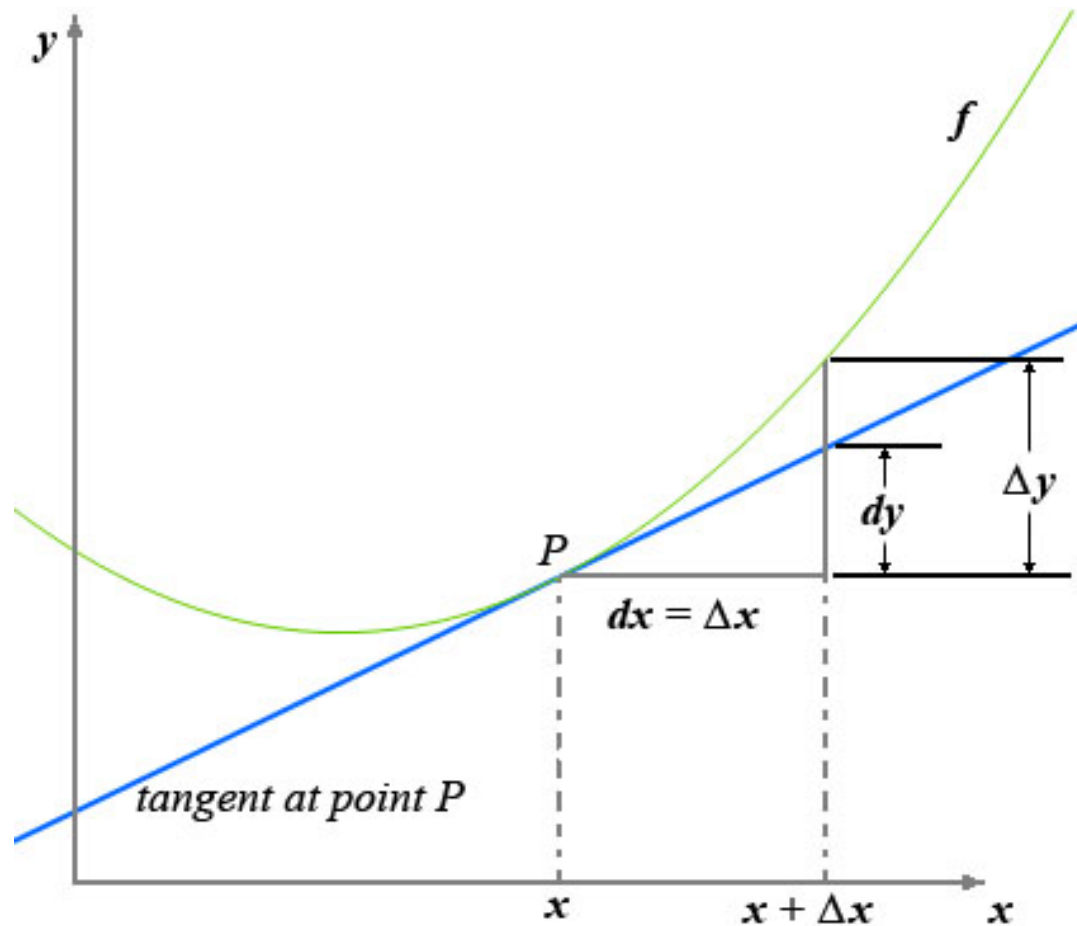


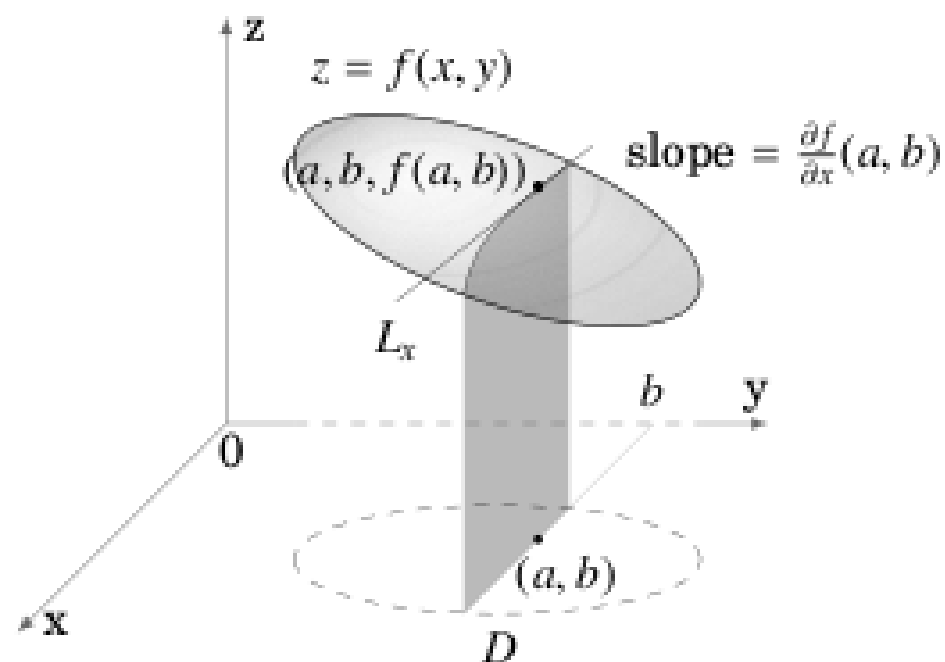
Matemáticas II

Plano tangente a una superficie en un punto

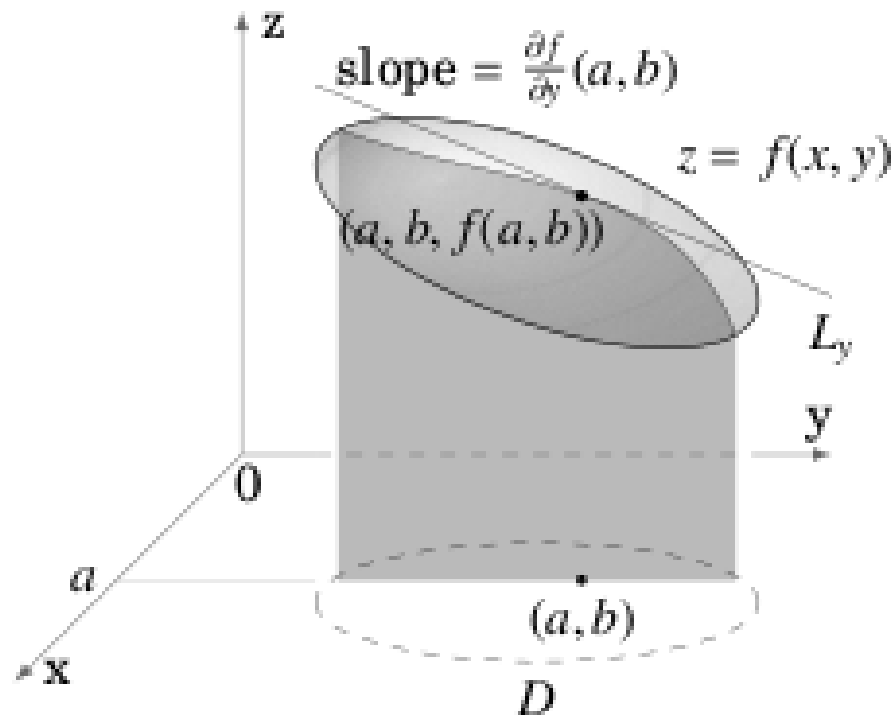
Derivada de una función de una variable



Derivadas parciales



Derivadas parciales (y 2)



Puesto que la derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ se usa para encontrar la tangente a la gráfica de f (que es una curva en $\mathbb{R}^2$), podemos esperar usar las derivadas parciales para definir un plano tangente a la gráfica de una superficie $z = f(x,y)$.

Plano tangente, informalmente, es un plano que localmente sólo “toca” a la superficie en un punto.

Definición Plano Tangente

Sea $z = f(x,y)$ la ecuación de una superficie S en $\mathbb{R}^3$ y $P = (a,b,c)$ un punto en S . Sea T un plano que contiene al punto P y sea $Q = (x,y,z)$ un punto cualquiera en la superficie S . Si el ángulo (agudo) entre el vector $\mathbf{PQ}$ y el plano T se acerca a 0 cuando el punto Q se acerca a P sobre la superficie S , decimos que T es el plano tangente a S en P .

Puesto que, en $\mathbb{R}^3$, dos direcciones distintas determinan un plano (fijado un punto), las rectas L_x y L_y anteriores están contenidas en el plano tangente a la superficie por ese punto, supuesto que este plano existe.

Pueden existir las derivadas parciales y no haber plano tangente. Sin embargo, si existen las parciales en una región alrededor de (a,b) y son continuas en (a,b) entonces existe plano tangente en $(a,b,f(a,b))$.

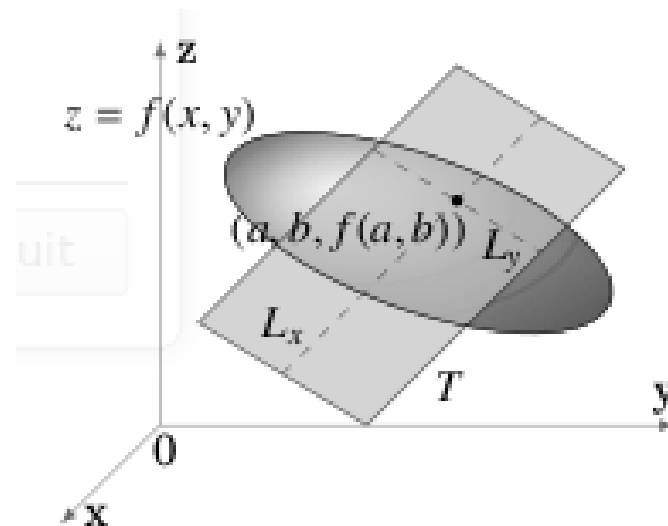
Ecuación del plano tangente

$$z = f(x, y)$$

T plano tangente a la sup.

$z=f(x,y)$ en $(a,b,f(a,b))$

L_x , L_y rectas tangentes a la sup.
en los planos $y=b$ y $x=a$, resp.



La ecuación de T es

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-f(a,b)) = 0$$

donde $\mathbf{n}=(A,B,C)$ es un vector normal a T.

Ecuación del plano tangente

Como T contiene a las rectas L_x y L_y , sólo necesitamos dos vectores $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$, paralelos a L_x y L_y , y entonces hacer $\mathbf{n} = \mathbf{v}_x \times \mathbf{v}_y$.

$$\mathbf{v}_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)) \qquad \mathbf{v}_y = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_x \times \mathbf{v}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Ecuación del plano tangente

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b) + z - f(a, b) = 0$$

Y, multiplicando por -1, la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

Ejercicios

Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+y^2$ en el punto $(1,2,5)$

Si la superficie está implícitamente definida por $F(x,y,z)=0$ el plano tangente en (a,b,c) viene dado por la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$$

Ecuación del plano tangente a $x^2+y^2+z^2=9$ en $(2,2,-1)$