

Matemáticas II

Integrales triples

Integral triple

Definimos aquí la integral triple de una función real $f(x,y,z)$ sobre un sólido S en R^3 .

Y lo haremos como en el final del tema anterior:

Encerramos el sólido S en un paralelepípedo rectangular, que dividimos en subparalelepípedos, con lados de longitudes Δx_i , Δy_j , Δz_k , y escogemos un punto (x_i, y_j, z_k) .

Integral triple

Se define la integral triple de $f(x,y,z)$ sobre S

$$\iiint_S f(x,y,z) dV$$

como

$$\lim \sum \sum \sum f(x_s, y_s, z_s) \Delta x \Delta y \Delta z$$

donde el límite es sobre todos las posibles divisiones en subparalelepípedos de S cuya mayor diagonal tiene a 0, y el triple sumatorio lo es sobre todos los subparalelepípedos dentro de S

¿qué significa?

La integral doble representa el volumen bajo una superficie.

La integral triple generaliza esta idea: representa el “hipervolumen” bajo una superficie tridimensional $w=f(x,y,z)$ cuya gráfica está en $\mathbb{R}^4$.
(longitud=volumen en $\mathbb{R}^1$, área=volumen en $\mathbb{R}^2$,...)

¿cómo se calcula?

Si S es un paralelepípedo rectangular,

$$S = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$$

entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Calcular $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (xy + z) dx dy dz$.

¿cómo se calcula?

Si S es un sólido limitado superiormente por $z=g_2(x,y)$ e inferiormente por $z=g_1(x,y)$, y está acotado por las curvas $h_1(x)$ y $h_2(x)$, y x varía entre a y b , entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Calcular $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz dy dx$

¿qué significa

$$\iiint_S 1 \, dV \, ?$$