

Matemáticas II

Integrales de línea

En Física la idea intuitiva de trabajo queda recogida en la fórmula

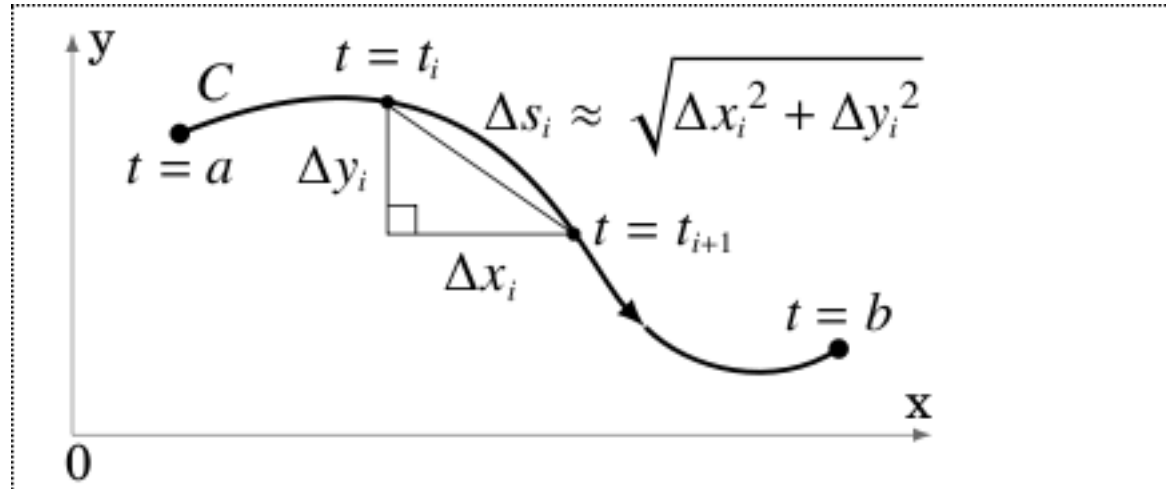
$$\text{Trabajo} = \text{Fuerza} \times \text{Espacio}$$

Si $f(x)$ es la fuerza aplicada, a lo largo del eje x , a un objeto situado en la posición x de $[a,b]$, el trabajo (work) W realizado al mover el objeto desde $x=a$ hasta $x=b$ se define por

$$W = \int_a^b f(x) dx$$

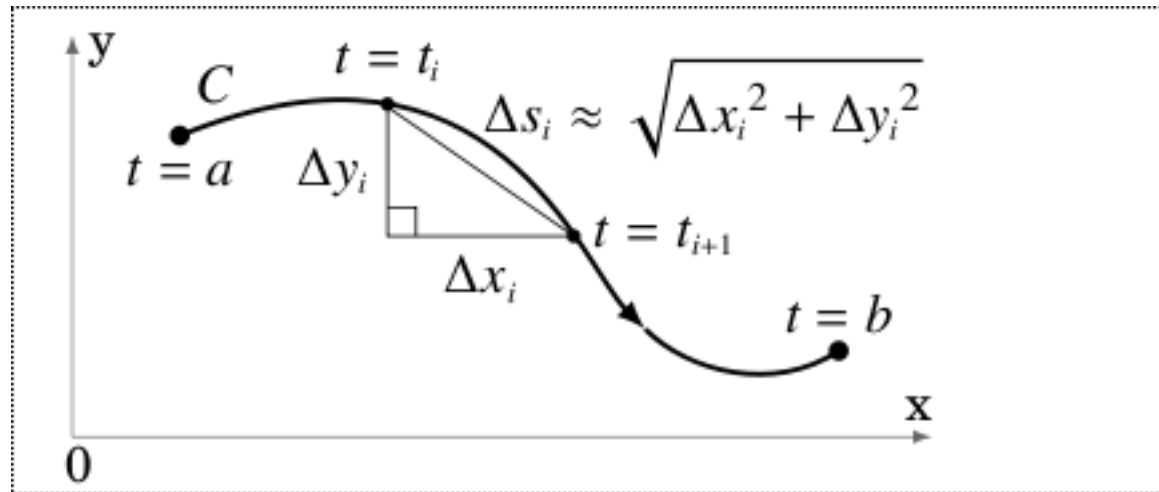
Aquí definiremos la integral de una función (escalar o vectorial) de dos variables sobre una curva en $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que queremos medir el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo de una curva C en $\mathbb{R}^2$, estando C descrita por una **parametrización** suave (smooth) $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$, con una fuerza $f(x,y)$ que varía con la posición (x,y) del objeto y que se aplica en la dirección del movimiento a lo largo de C .



Suponemos f real y continua (sólo interesa su magnitud en este momento)

Consideramos una partición del intervalo $[a,b]$,
 $a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, $n \geq 2$,



En el subintervalo genérico $[t_i, t_{i+1}]$, la longitud Δs_i es aproximada por el teorema de Pitágoras. Si el subintervalo es “pequeño” el trabajo es aproximadamente $f(x_{i^*}, y_{i^*}) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ donde el punto es cualquiera. Resulta entonces que

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i^*}, y_{i^*}) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Como

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \quad \text{donde } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i,$$

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i*}, y_{i*}) \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i$$

Tomando el límite de esta suma cuando la longitud del mayor de los subintervalos tiende a 0, la suma sobre todos los subintervalos es la integral desde $t=a$ hasta $t=b$, $\Delta x_i / \Delta t_i$ se convierte en $x'(t)$

(análogamente para y) y $f(x_{i*}, y_{i*})$ en $f(x(t), y(t))$, es

$$W = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Este cálculo hace proponer la siguiente definición:

Integral de línea

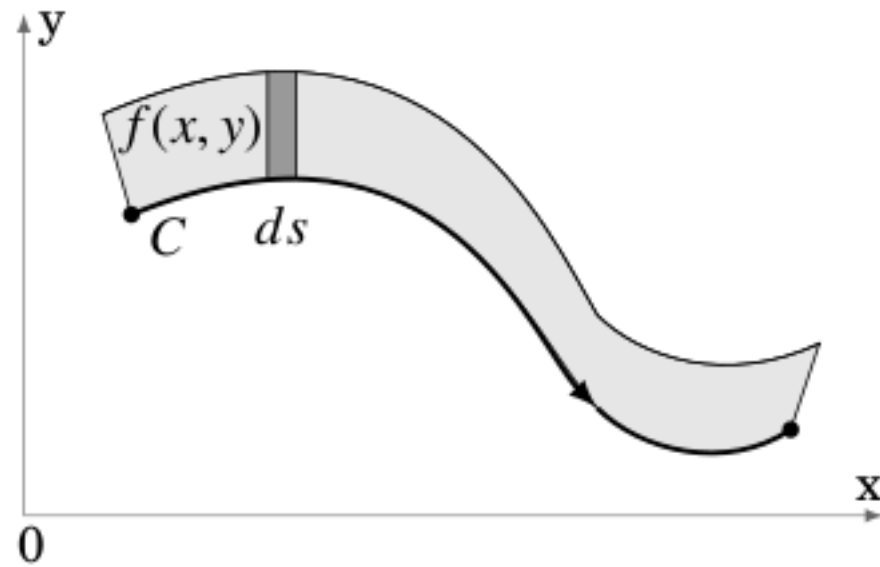
Para una función real $f(x,y)$ y una curva C , parametrizada por $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$, la integral de línea de $f(x,y)$ a lo largo de C con respecto a la longitud de arco s es

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

El símbolo ds es la diferencial de la función longitud de arco

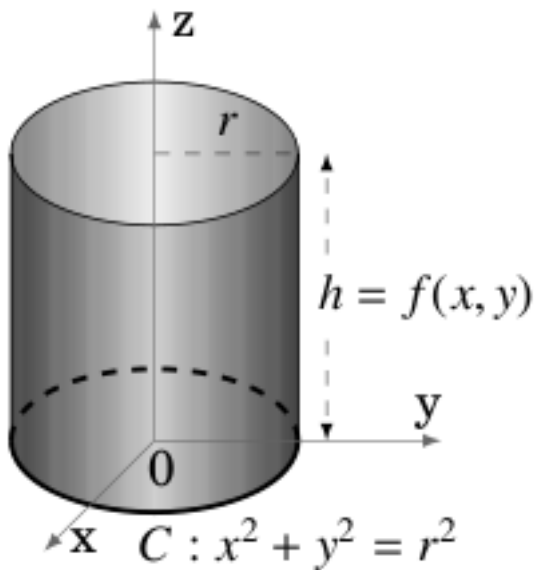
$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du \qquad ds = s'(t) dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

¿qué significa $\int_C f(x, y) ds$?



Ejemplo

Usando una integral de línea, mostrar que el área lateral de un cilindro circular de radio r y altura h es $2\pi rh$.



$$x = x(t) = r \cos t, \quad y = y(t) = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} A &= \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} h \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= h \int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= rh \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi rh \end{aligned}$$

Nótese que si en el ejemplo anterior hubiésemos descrito dos veces la circunferencia C (es decir, hubiéramos considerado $0 \leq t \leq 4\pi$), el valor del área sería $4\pi rh$ (¡hágase!).

Nótese asimismo que hemos recorrido C en sentido antihorario. Yendo en dirección de las agujas del reloj, es decir, usando la parametrización

$$x = x(t) = r \cos(2\pi - t), \quad y = y(t) = r \sin(2\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

el valor de la integral no varía (¡hágase, también!)

Otras integrales de línea

Integral de línea de $f(x,y)$ a lo largo de C con respecto a x

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

Integral de línea de $f(x,y)$ a lo largo de C con respecto a y

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\mathbf{f}(x,y)$ un campo (función) vectorial definido en $\mathbb{R}^2$ por $\mathbf{f}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones reales definidas en $\mathbb{R}^2$.

Dada C , curva con una parametrización suave $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$, sea $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ el vector de posición para un punto $(x(t), y(t))$.

Entonces $\mathbf{r}'(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}$ y, por definición de $\mathbf{f}(x,y)$

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y) dx + \int_C Q(x,y) dy &= \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt\end{aligned}$$

Integral de línea de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\mathbf{f}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ y una curva C con parametrización suave $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$, la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de C es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C P(x,y) dx + \int_C Q(x,y) dy \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt ,\end{aligned}$$

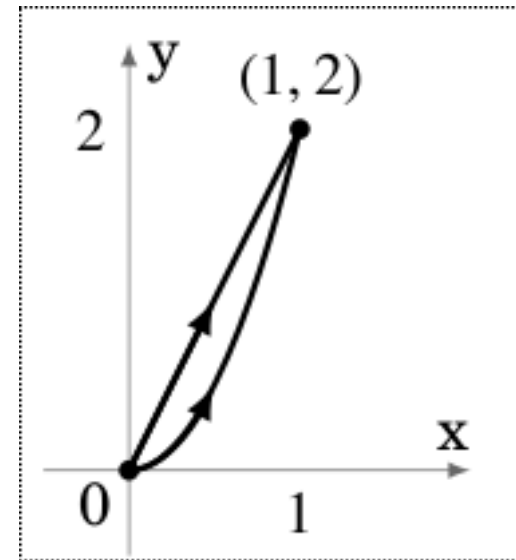
donde $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de los puntos de C .

Se usa la notación $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t)dt=dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ para denotar la diferencial de la función vectorial $\mathbf{r}$

Ejemplo

Calcular $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ siendo

- a) $C: x=t, y=2t, 0 \leq t \leq 1$
- b) $C: x=t, y=2t^2, 0 \leq t \leq 1$



Si C es una curva suave a trozos, es decir,

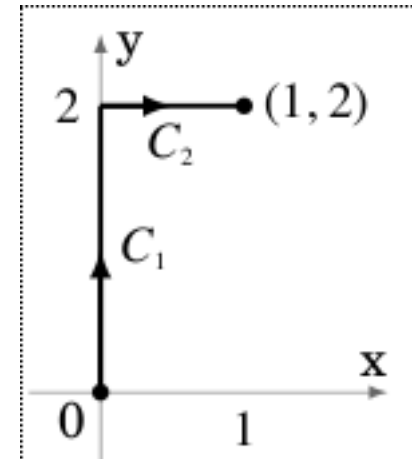
$$C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$$

es unión de curvas suaves, se define

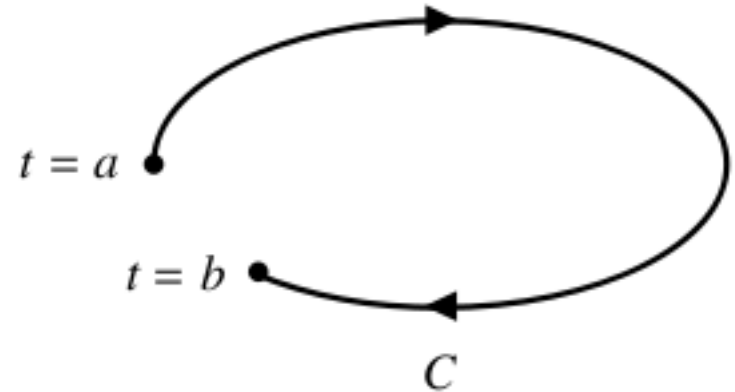
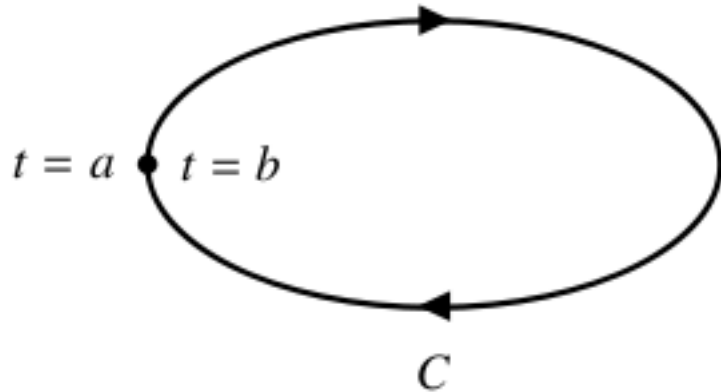
$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_2 + \dots + \int_{C_n} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_n$$

donde cada $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de cada C_i .

Ejemplo: Evaluar $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ donde C es la poligonal desde $(0,0)$ hasta $(0,2)$ y hasta $(1,2)$



Una curva C es cerrada si sus puntos inicial y final coinciden: $C: x=x(t), y=y(t), a \leq t \leq b$
 $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$



Una curva cerrada simple es aquella que no se corta a sí misma.

Escribimos

$$\oint_C f(x,y) ds \quad \text{and} \quad \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

para integrales de línea de campos escalares y vectoriales, resp.

Independencia del camino

Se ha visto que una integral de línea de un campo escalar no varía si la curva se recorre en uno u otro sentido. Pero si el campo es vectorial la situación cambia.

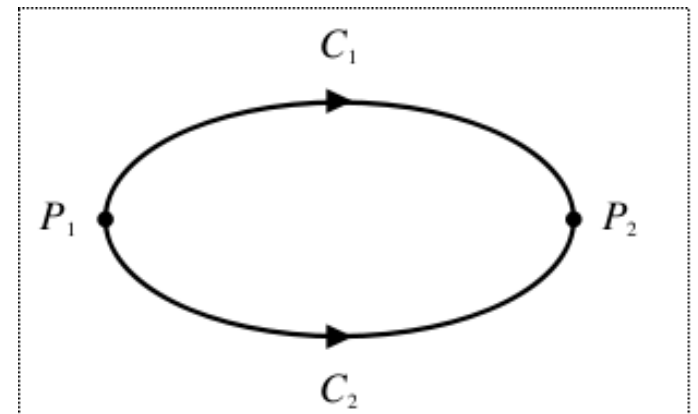
En los ejercicios anteriores se han evaluado integrales de campos vectoriales que resultaron ser independientes del camino. El siguiente teorema proporciona una condición necesaria y suficiente para la independencia del camino.

Teorema

En una región R la integral $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino entre dos puntos cualesquiera de R si, y sólo si, $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada curva cerrada C contenida en R .

demostración:

Supongamos que $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada curva cerrada C contenida en R . Sean P_1 y P_2 dos puntos distintos de R . C_1 una curva de R que va de P_1 a P_2 , y C_2 otra curva en R de P_1 a P_2 .



Entonces $C = C_1 \cup -C_2$ es una curva cerrada en R (de P_1 a P_1). Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

de donde $\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

Si la integral $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= 0 \\ \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= 0, \text{ so} \\ \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= 0 \end{aligned}$$

Una condición suficiente: Teorema

Sea $\mathbf{f}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ un campo vectorial en una región R , con P y Q continuamente diferenciables en R .

Sea C una curva lisa en R parametrizada por $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$.

Supongamos que existe una función real $F(x,y)$ tal que $\nabla F = \mathbf{f}$ en R .

Entonces $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(B) - F(A)$

donde $A=(x(a),y(a))$ y $B=(x(b),y(b))$ son los extremos de C .

La integral es independiente del camino porque sólo depende de los valores de F en los extremos.

Por definición

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt \Big|$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$\nabla F = \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = P \text{ and } \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$= \int_a^b F'(x(t), y(t)) dt$$

$$= F(x(t), y(t)) \Big|_a^b = F(B) - F(A)$$

Una función real $F(x,y)$ para la que $\nabla F(x,y) = \mathbf{f}(x,y)$ se llama función potencial de $\mathbf{f}$. Un campo vectorial se dice conservativo si admite una función potencial.

Ejercicio: Mostrar que $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ es independiente del camino.

Hay que encontrar una función potencial $F(x,y)$ con

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{and} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$$

...

la función potencial es $F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$. Luego la integral es independiente del camino.

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(1, 2) - F(0, 0) = \frac{1}{3}(1)^3 + (1)(2)^2 - (0 + 0) = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}$$

Corolario

Si un campo vectorial $\mathbf{f}$ admite un potencial en una región R , entonces $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Es decir, para cualquier función real $F(x,y)$

$$\oint_C \nabla F \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ejercicio: Evaluar $\oint_C x dx + y dy$ for $C : x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

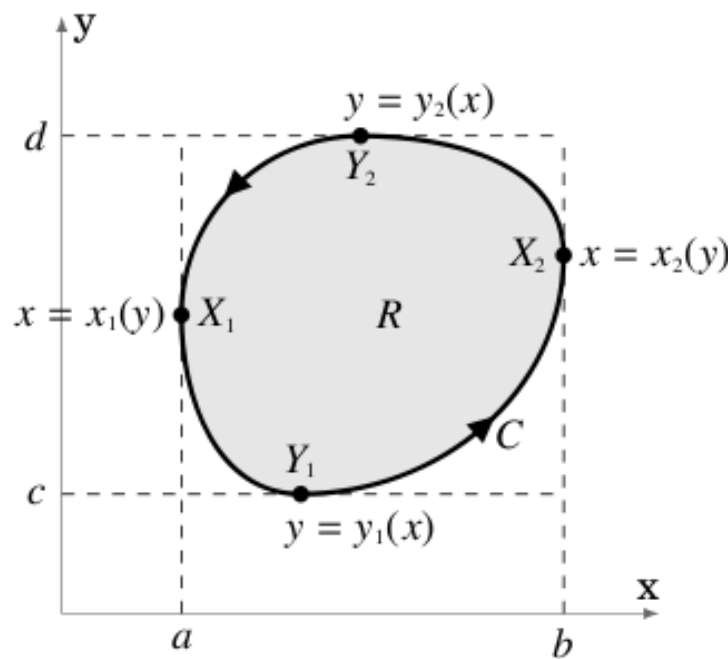
Teorema de Green (en el plano)

Sea R una región de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es una curva C simple cerrada y suave. Sea $\mathbf{f}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ un campo vectorial donde P y Q son continuas y tienen parciales primeras continuas. Entonces

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

donde se recorre C de manera que R está siempre a la izquierda de C .

Demostración:
es decir, donde
escrita como u
formas distinta



región simple R ,
puede ser
 C_1 y C_2 de dos

i) C_1 : la curva $y=y_1(x)$ desde X_1 hasta X_2

C_2 : la curva $y=y_2(x)$ desde X_2 hasta X_1 , donde X_1
y X_2 son los puntos más a la izda. y dcha. en C

ii) C_1 : la curva $x=x_1(y)$ desde Y_2 hasta Y_1

C_2 : la curva $x=x_2(y)$ desde Y_1 hasta Y_2 , donde
 Y_1 e Y_2 son los puntos más bajo y alto en C

Integrando $P(x,y)$ a lo largo de C usando las curvas i)

$$\begin{aligned}
 \oint_C P(x,y) dx &= \int_{C_1} P(x,y) dx + \int_{C_2} P(x,y) dx \\
 &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx \\
 &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_2(x)) dx \\
 &= - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx \\
 &= - \int_a^b \left(P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \right) dx \\
 &= - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx \\
 &= - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dA .
 \end{aligned}$$

(by the Fundamental Cálculo)

Integrando $Q(x,y)$ a lo largo de C usando las curvas ii)

$$\begin{aligned}
 \oint_C Q(x, y) dy &= \int_{C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_2} Q(x, y) dy \\
 &= \int_d^c Q(x_1(y), y) dy + \int_c^d Q(x_2(y), y) dy \\
 &= - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy + \int_c^d Q(x_2(y), y) dy \\
 &= \int_c^d (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy \\
 &= \int_c^d \left(Q(x, y) \Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \right) dy \\
 &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy \quad \text{(by the Fundamental Cálculo)} \\
 &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA,
 \end{aligned}$$

de donde

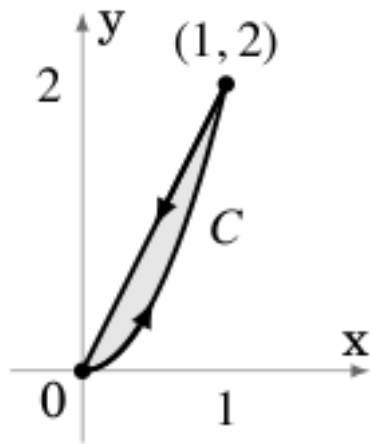
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C P(x, y) dx + \oint_C Q(x, y) dy \\ &= - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dA + \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA .\end{aligned}$$

QED

Aunque el teorema ha sido probado para una región simple, puede ser demostrado para regiones más generales (por ejemplo, una unión de regiones simples).

Ejercicio

Evaluar $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ donde C es la frontera (recorrida en sentido antihorario) de la región $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq x\}$



$$P(x, y) = x^2 + y^2, \quad Q(x, y) = 2xy$$

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (2y - 2y) dA = \iint_R 0 dA = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio

Si $\mathbf{f}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ donde $P(x,y)=-y/(x^2+y^2)$, $Q(x,y)=x/(x^2+y^2)$, y $R=\{(x,y):0<x^2+y^2\leq 1\}$, calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de $C: x^2+y^2=1$ en sentido antihorario.

Respuesta: $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$.

¿Y usando el th. de Green (si es posible)?

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0$$

La razón es ...

Aplicación de las integrales de línea al cálculo de centros de masa, centroides, ... de alambres.

10.8 Otras aplicaciones de las integrales de línea

Las integrales de línea con respecto a la longitud de arco se presentan también en problemas relativos a la distribución de la masa a lo largo de una curva. Por ejemplo, imaginemos una curva C en el espacio de tres dimensiones como un delgado alambre de densidad variable. Supongamos que la densidad se expresa mediante un campo escalar φ , siendo $\varphi(x, y, z)$ la *masa por unidad de longitud* en el punto (x, y, z) de C . La masa total M del alambre viene entonces definida como la integral de línea de φ con respecto a la longitud de arco:

$$M = \int_C \varphi(x, y, z) \, ds.$$

El *centro de gravedad* se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas están determinadas por las ecuaciones

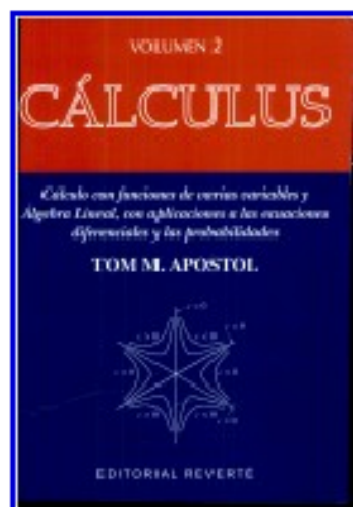
$$\bar{x}M = \int_C x\varphi(x, y, z) \, ds, \quad \bar{y}M = \int_C y\varphi(x, y, z) \, ds, \quad \bar{z}M = \int_C z\varphi(x, y, z) \, ds.$$

Un alambre de densidad constante se llama *uniforme*. En este caso el centro de gravedad también se llama *centroide*.

Acerca de este libro

Vista previa del libro

Calculus Escrito por Tom M. Apostol, Francisco Vélez Cantarell



Vista previa del libro

Palabras y frases clave

[autovectores](#), [autovalores](#), [variable aleatoria](#), [campo escalar](#), [transformación lineal](#), [campo vectorial](#), [integral de línea](#), [espacio euclídeo](#), [números reales](#), [espacio muestral](#), [conjunto conexo](#), [teorema de Stokes](#), [vector](#), [función de distribución](#), [combinación lineal](#), [conjunto abierto](#), [derivadas parciales](#), [matriz diagonal](#), [polinomios de Legendre](#), [producto vectorial](#)

Más información

Calculus

Escrito por Tom M. Apostol, Francisco Vélez Cantarell

Traducido por Francisco Vélez Cantarell

Edition: 2

Publicado por Reverte, 1996

ISBN 9686708111, 9789686708110

800 páginas

Comprar este libro

[Editorial Reverte](#)

[Amazon.com](#)

[Barnes&Noble.com](#)

[Books-A-Million](#)

[Borders](#)

[Casa del Libro](#)

[IndieBound](#)

[Google Product Search](#)

[El Corte Inglés](#)

Tomar prestado este libro

Ejercicio

La densidad en un punto de un alambre semicircular de radio a es directamente proporcional a la distancia del punto a la recta que pasa por los extremos del alambre. Calcular su centro de gravedad.

Solución:
($0, \pi/4 a$)