

Matemáticas II

Integrales dobles

Integral de Riemann (repaso)

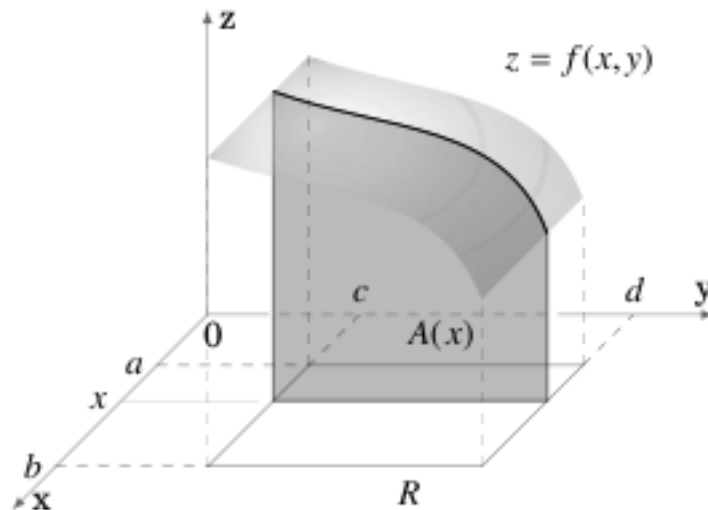
<http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/>

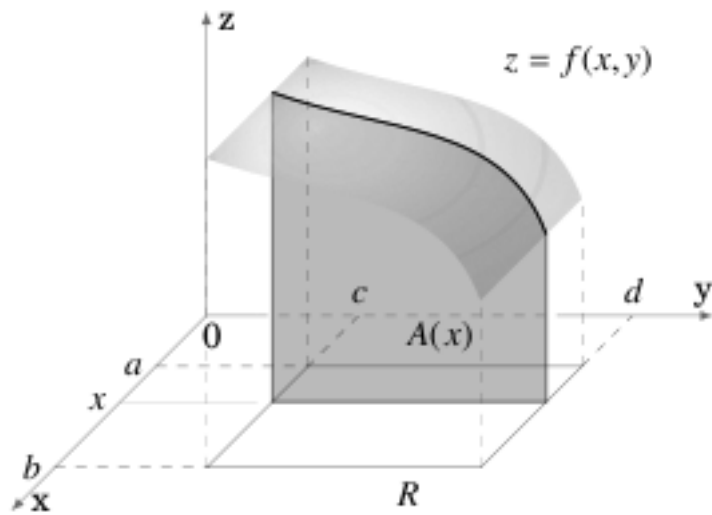
Integral doble

La integral doble de una función continua no negativa $f(x,y) \geq 0$ “representa” el volumen bajo la superficie $z = f(x,y)$

Sea $f(x,y)$ una función continua tal que $f(x,y) \geq 0$ para cada (x,y) en el rectángulo

$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ de $\mathbb{R}^2$. ($R = [a,b] \times [c,d]$)





$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Calcular el volumen bajo el plano $z=8x+6y$ sobre el rectángulo $R= [0,1] \times [0,2]$

Id. para la superficie $z=e^{(x+y)}$ sobre el rectángulo $R=[2,3] \times [1,2]$

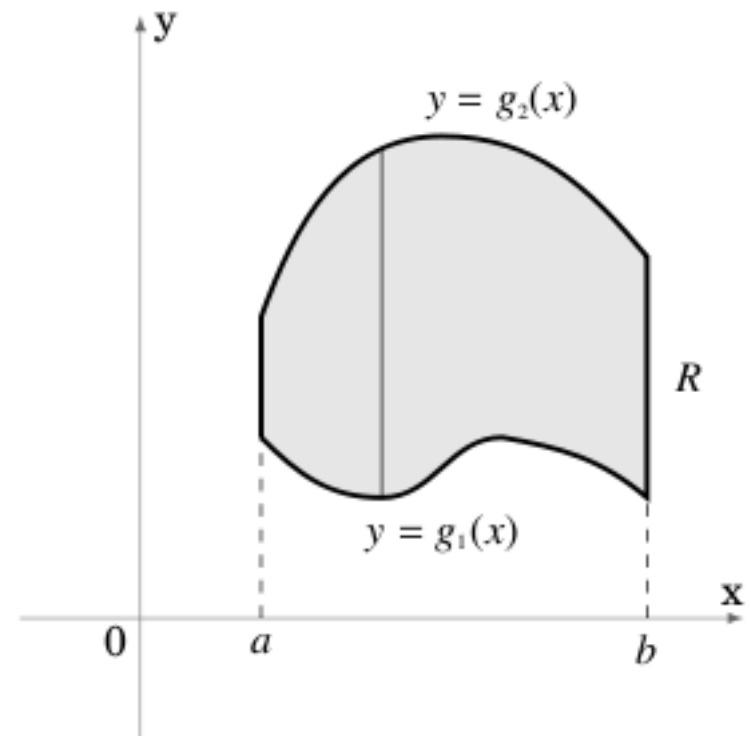
con funciones negativas ...

Para funciones de una variable $f(x)$, $\int_a^b f(x)$ representa el área debajo de la curva y por encima del eje X cuando $f(x) \geq 0$, y el área por encima de la curva y por debajo del eje X cuando $f(x) \leq 0$. Ocurre lo mismo con integrales de funciones de dos variables: el método expuesto de cálculo de integrales dobles puede ser usado para **cualquier** función continua sobre un rectángulo.

Ejemplo. Calcular $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x + y) \, dx \, dy$

Integrales dobles sobre una región general

Supongamos una región en el plano acotada por la izquierda por la recta $x=a$, por la derecha por la recta $x=b$ (con $a < b$), acotada por debajo por la curva $y=g_1(x)$ y por encima por $y=g_2(x)$ (donde g_1 y g_2 no se cortan en (a,b) , aunque pudieran tocarse en a o b)



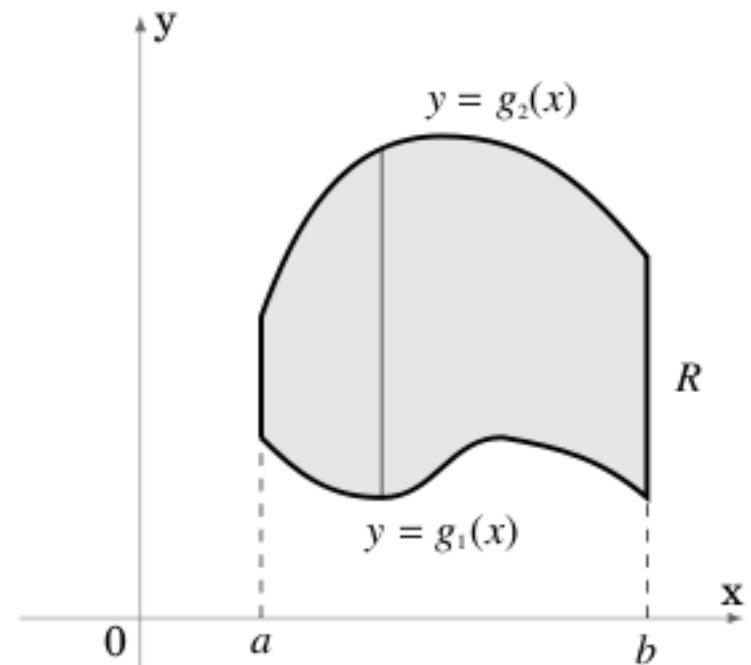
Integrales dobles sobre una región general

La integral doble de una función real $f(x,y)$ sobre la región R

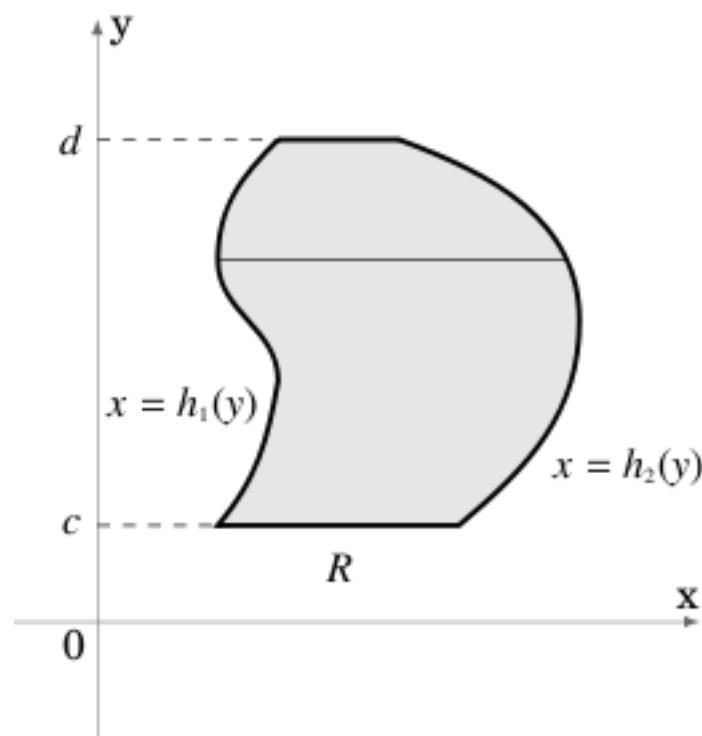
$$\iint_R f(x,y) dA$$

es

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$



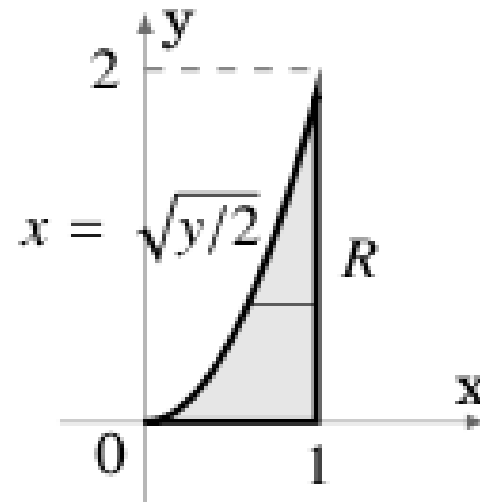
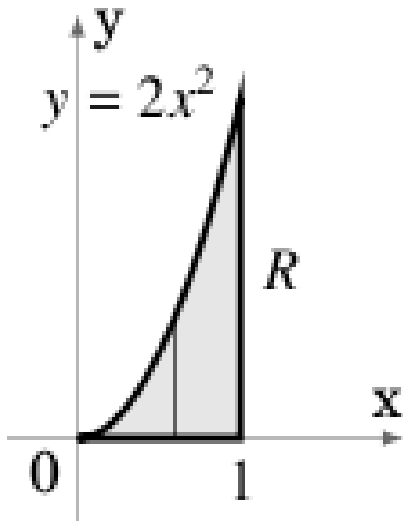
Análogamente



$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

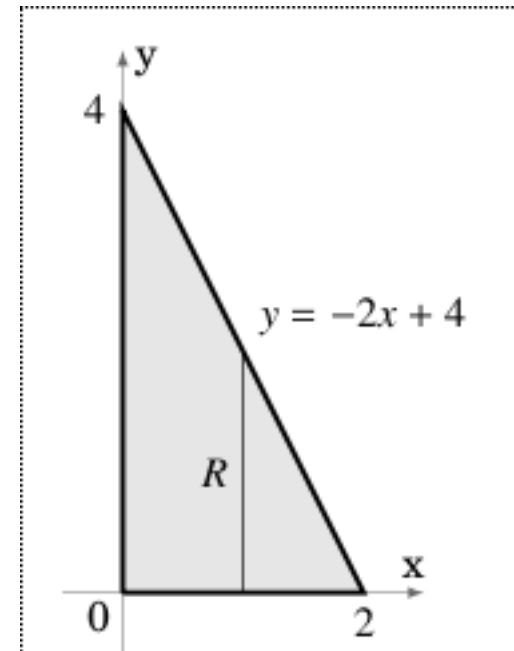
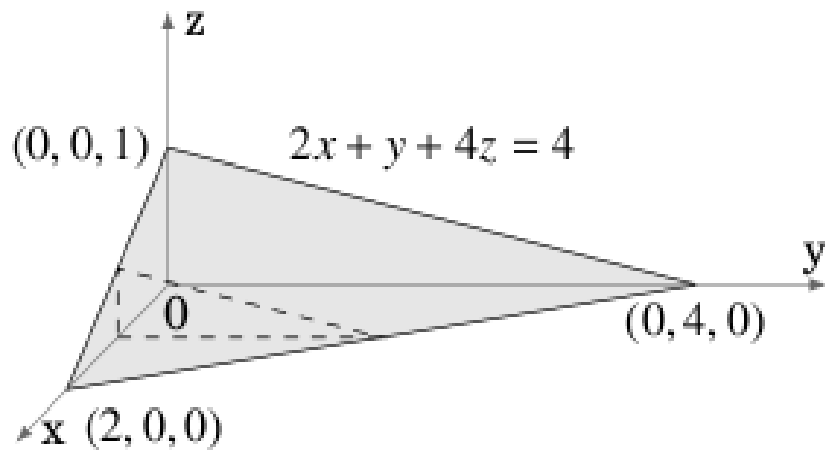
Ejemplo

Calcular el volumen bajo el plano $z=8x+6y$ sobre la región $R=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2x^2\}$



Ejemplo

Calcular el volumen V del sólido limitado por los tres planos coordenados y el plano $2x + y + 4z = 4$



Integrales sobre regiones aún más generales. Integrales impropias.

Para una región R más general que las anteriores la integral doble se define como sigue:

Supongamos f no negativa y R una región acotada de $\mathbb{R}^2$, que, por lo tanto, puede ser encerrada dentro de un rectángulo $[a,b] \times [c,d]$.

Dividimos el rectángulo en subrectángulos, de los que sólo consideramos los completamente contenidos en R .

Integrales sobre regiones aún más generales. Integrales impropias.

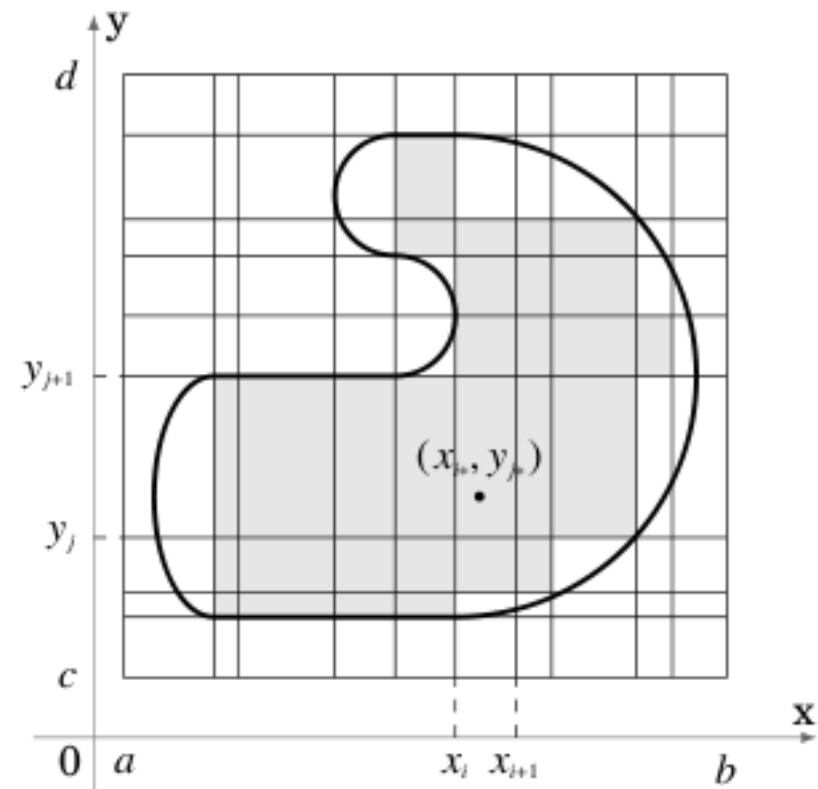
En cada subrectángulo

$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ escogemos un punto (x_k, y_k) .

El volumen bajo $z=f(x,y)$ y sobre ese subrectángulo es aprox. $f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$ donde

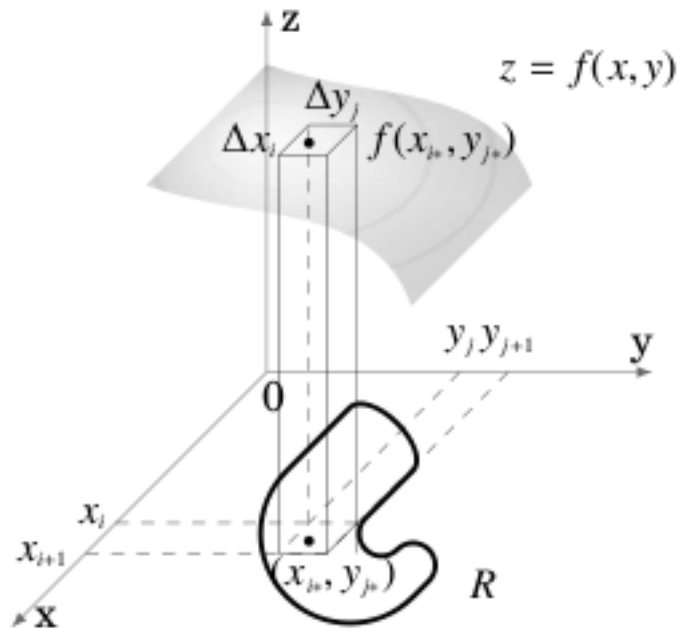
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $f(x_k, y_k)$ es la altura y $\Delta x_i \Delta y_j$ es el

área de la base de un paralelepípedo como se ve en la figura siguiente



Integrales sobre regiones aún más generales. Integrales impropias.

El volumen total bajo la superficie es aprox. la suma de los volúmenes de todos los paralelepípedos



$$\sum_j \sum_i f(x_{is}, y_{js}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Si tomamos más y más subrectángulos (de manera que la mayor diagonal tienda a cero) éstos recubren la región R .

Integrales sobre regiones aún más generales. Integrales impropias.

Definimos

$$\iint_R f(x, y) dA$$

como el límite del doble sumatorio anterior para todas las posibles divisiones en subrectángulos del rectángulo $\{a, b\} \times \{c, d\}$ y cuando la mayor de las diagonales tiende a 0.

Integrales sobre regiones aún más generales. Integrales impropias.

La región R no tiene porqué estar acotada o la función f no tiene porqué estar definida en todo R . Para ello utilizamos una inmediata generalización de las integrales unidimensionales impropias (vid. ejercicios)