

Matemáticas II

Funciones

Funciones reales de variable real

Sea $D \subset \mathbb{R}$. Llamamos *función real de variable real* (o *dominio real* D) a cualquier correspondencia f que asigne a cada número $x \in D$ otro número real, único, denotado por $f(x)$ y llamado valor de f en x

Ejemplo

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^2$

Gráfica

Funciones vectoriales de variable real

Una *función vectorial de una variable real* es una regla que asocia un vector $\mathbf{f}(t)$ con un número real t , donde t pertenece a un subconjunto D de $\mathbb{R}^1$ (llamado *dominio* de $\mathbf{f}$).

Escribimos $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ para expresar que $\mathbf{f}$ es una aplicación de D en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo. $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ es una función vectorial en $\mathbb{R}^3$, definida para todos los números reales t . Escribimos $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. En $t = 1$ el valor de $\mathbf{f}$ es el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, que en coordenadas cartesianas tiene como extremo $(1, 1, 1)$.

Funciones vectoriales de variable real

Una función vectorial de una variable real puede ser escrita en términos de sus componentes como

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

o de la forma

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

Para ciertas funciones reales $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, llamadas las *funciones componentes* de $\mathbf{f}$.

Funciones vectoriales de variable real

Ejemplo

$\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

Gráfica

Funciones reales de varias variables

Una función real f definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ es una regla que asigna a cada punto (x,y) en D un número real $f(x, y)$. El mayor conjunto posible D de $\mathbb{R}^2$ en el que f está definida se llama el *dominio* de f , y el *rango* de f es el conjunto de todos los números reales $f(x, y)$ cuando (x, y) varía sobre el dominio D .

Una definición similar se tiene para funciones $f(x, y, z)$ defined on points (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$

Ejemplos. i) $f(x,y) = xy$ ii) $f(x,y) = 1/(x-y)$ iii) $f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{(1/2)}$ iv) $f(x,y,z) = e^{(x+y-z)}$

Funciones reales de varias variables

Se escribe frecuentemente una función $f(x,y)$ definida en $\mathbb{R}^2$ como $z = f(x,y)$. La *gráfica* (o el *grafo*) de $z = f(x,y)$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ (el conjunto $\{(x,y,z): z = f(x,y)\}$).

Los cortes de esta superficie por planos $z = c$, cuando c varía en $\mathbb{R}$, se llaman *curvas de nivel* de la función.

Funciones reales de varias variables

Representar $\text{Sin}[\text{Sqrt}[x^2+y^2]]/\text{Sqrt}[x^2+y^2]$

Curvas de nivel

Funciones vectoriales de varias variables reales

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Ejemplo

$$\mathbf{f}: (\text{long, latitud}) \rightarrow (\text{presión, temperatura, humedad})$$