

Matemáticas II

Extremos condicionados

Ejercicio

Encontrar las dimensiones que maximicen el área de un rectángulo de perímetro 20m

lados x, y

área $A = xy$

perímetro $P = 2x + 2y = 20$

Maximizar: $f(x, y) = xy$

dado: $2x + 2y = 20$

En el ejercicio anterior pudimos escribir una variable en función de la otra en la condición impuesta: $2x + 2y = 20$. Pero, ¿y si la condición hubiera sido, por ejemplo, $x^3 + y^3 = 2$?

Planteamiento general del problema

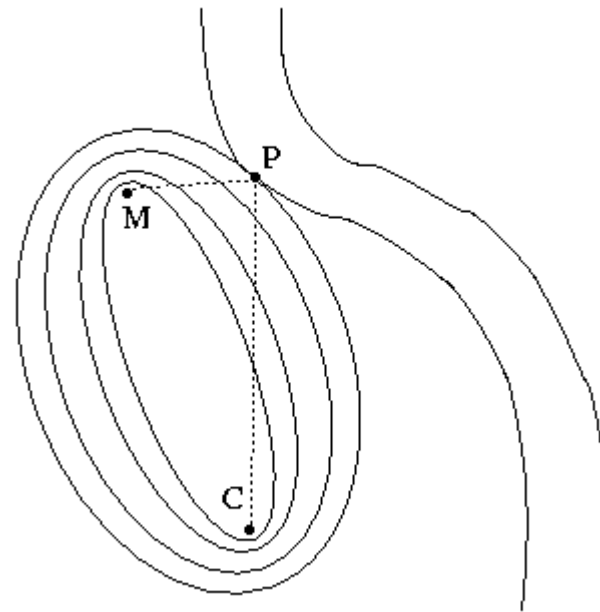
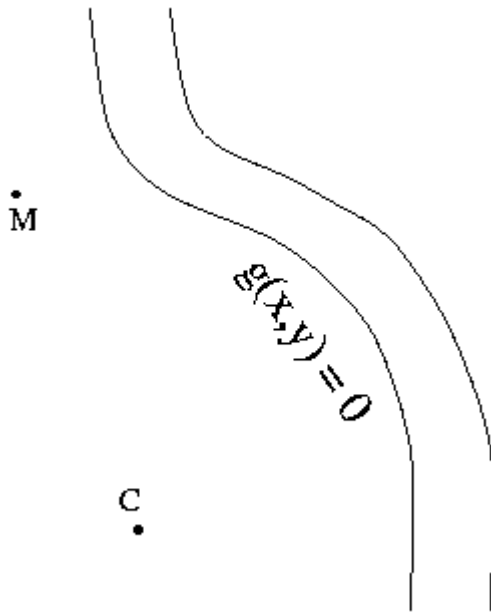
Maximizar (o minimizar): $f(x,y)$ (o $f(x,y,z)$)
dado: $g(x,y) = c$ (o $g(x,y,z) = c$) para c cte.

$g(x,y) = c$: condición
 x e y están condicionados por $g(x,y)=c$

Los puntos solución (x,y) son los extremos
condicionados

(análogamente para 3 variables)

Se trata de encontrar el punto P , en la orilla del río, para el cual la distancia $d(P,M) + d(P,C)$ es mínima.



La matemática involucrada

El vector gradiente de f en P y el de g en P ,
¡han de ser paralelos!

$$\nabla f (P) = \lambda \nabla g (P)$$

De otra forma (¡equivalente!), para optimizar la
función $f(P)$, sujeta a la condición $g(P)=0$,
calculamos los extremos de una nueva función
(llamada de Lagrange) definida por

$$F(P,\lambda) = f(P) - \lambda g(P)$$

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones continuamente diferenciables, y sea c una constante tal que $\nabla g(x,y) \neq 0$ para todo (x,y) satisfaciendo $g(x,y)=0$.

Para resolver el problema

Optimizar: $f(x,y)$

dado: $g(x,y) = c$,

hay que encontrar los puntos (x,y) que resuelven la ecuación $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ para algún λ (llamado multiplicador de Lagrange). Si existe algún extremo condicionado, entonces está entre esos puntos.

volviendo al rectángulo ...

Encontrar las dimensiones que maximicen el área de un rectángulo de perímetro 20m

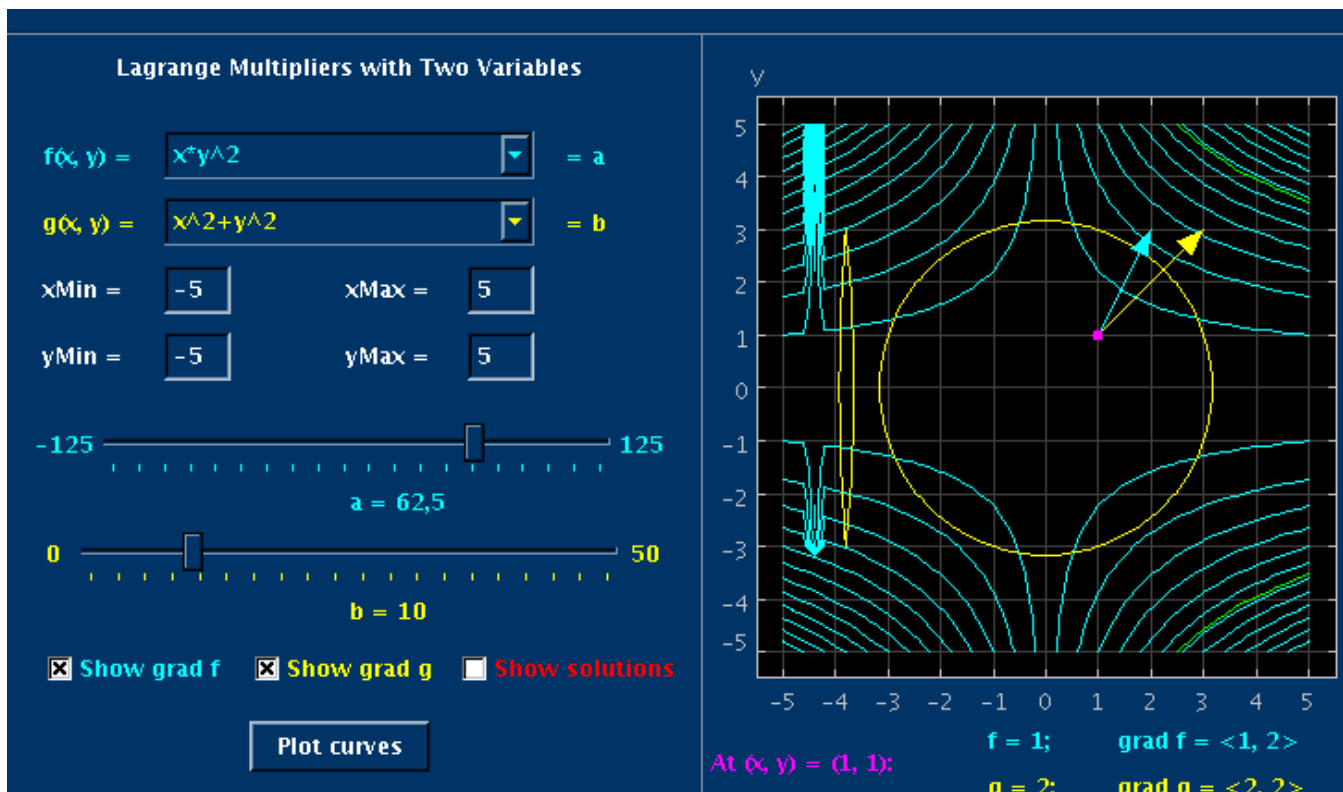
Maximizar: $f(x,y) = xy$

dado: $2x + 2y = 20$

Aquí, resolver $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ consiste en resolver las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$, es decir,
 $y = 2\lambda$
 $x = 2\lambda$

Un applet

<http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.02/f07/tools/LagrangeMultipliersTwoVariables.html>
o busca “LagrangeMultiplierTwoVariables”

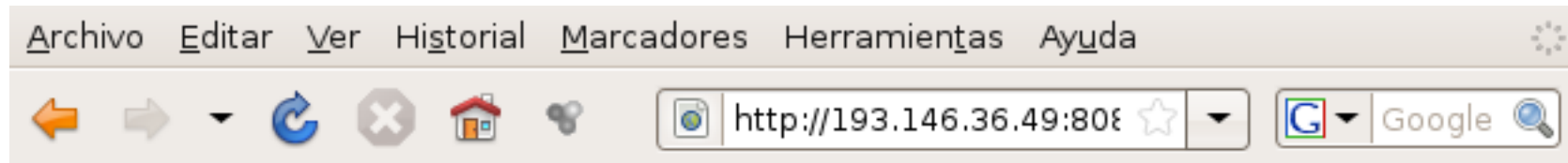


applet

Ejercicios

- i) Encontrar los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=80$ que están más cerca y más lejos del punto $(1,2)$
- ii) Optimizar $f(x,y,z) = x+z$ si $x^2+y^2+z^2 = 1$

Solución con PPW



Extremos condicionados de funciones de dúas e tres variables



Función

Condición(s)

Os posibles extremos son $\{x \rightarrow -4, y \rightarrow -8\}, \{x \rightarrow 4, y \rightarrow 8\}$.

Atopa posibles extremos de funcións de dúas $f(x,y)$ ou tres $f(x,y,z)$ variables sometidas a unha ou máis condicións (débense introducir as condicións entre chaves e separadas por comas)

[Índice PPW](#)

Terminado

Solución con PPW

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

  Google 

Extremos condicionados de funciones de dúas e tres variables

POWERED BY
webMATHEMATICA 

Función

Condición(s)

Os posibles extremos son $\left\{y \rightarrow 0, x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}, z \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{y \rightarrow 0, x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$

Atopa posibles extremos de funcións de dúas $f(x,y)$ ou tres $f(x,y,z)$ variables sometidas a unha ou máis condicións (débense introduci-las condicións entre chaves e separadas por comas)

[Índice PPW](#)

Terminado

Qué significa λ ?

En el problema maximizar: $f(x,y) = xy$

$$\text{dado: } 2x + 2y = 20$$

teníamos que $(x,y)=(5,5)$ y $\lambda = x/2 = y/2$: $\lambda = 2.5$

Si resolvemos maximizar: $f(x,y) = xy$

$$\text{dado: } 2x + 2y = 21$$

la solución es $(5.25, 5.25)$. El área pasa de $f(5,5)=25$ a $f(5.25,5.25)=27.5625$.

Es decir, aumenta 2.5625 cuando incrementamos c en 1. Resulta que $\lambda = 2.5$ está cerca de 2.5625, es decir,

$$\lambda \sim \Delta f = f(\text{max nuevo}) - f(\text{max anterior})$$

Qué significa λ ?

El multiplicador de Lagrange es la tasa de cambio del valor óptimo con respecto a cambios en el valor de la restricción.

Economía: al maximizar el beneficio dado un recurso limitado, λ es el valor marginal del recurso

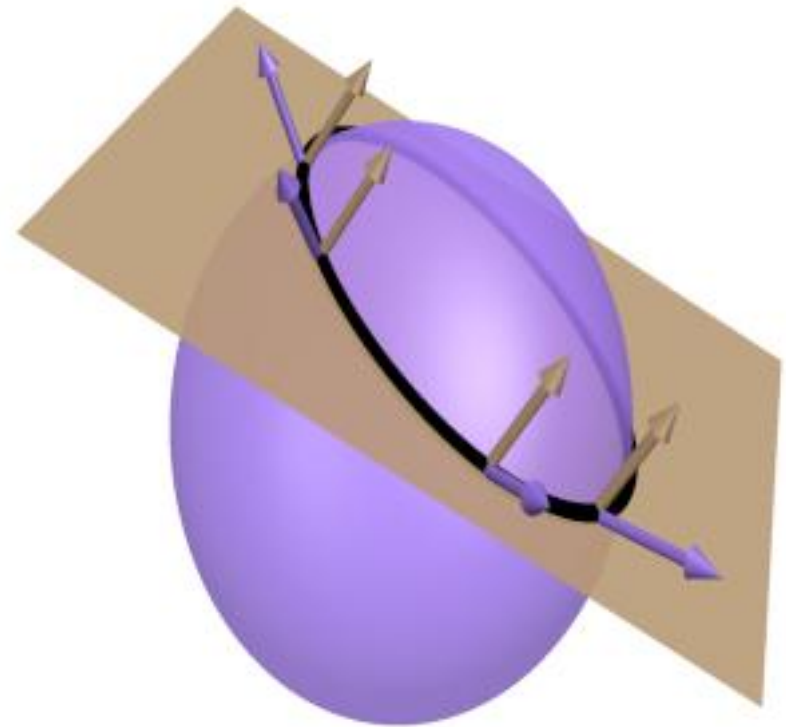
Varias condiciones simultáneas

Si hay más de una condición, lo que hay que hacer es reemplazar el lado derecho de la ecuación $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$ con la suma de los gradientes de cada una de las condiciones (¡cada uno con su correspondiente multiplicador!)

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$$

(normalmente esto sólo es relevante en 3D, porque 2 restricciones en 2D generalmente se cortan en puntos aislados)

En la figura la solución está condicionada a estar en el plano marrón ($g(P)=0$) y también en el elipsoide azul ($h(P)=0$). Para la satisfacción de ambas, la solución ha de estar en la elipse. Los vectores dibujados son normales a la superficie respectiva: ¡y son perpendiculares a la curva intersección! Cualquier vector perpendicular a la curva puede ser escrito como comb. lineal de dos normales (salvo degeneración-pl. y elips. tg)

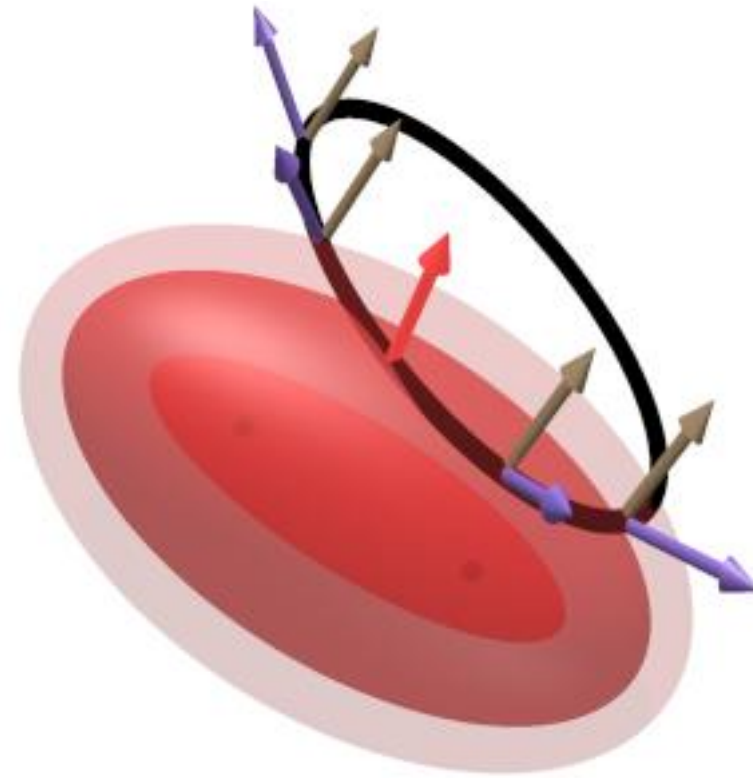


volviendo a la pastora ...

Los elipsoides rosas de la figura son superficies con los mismos focos y representan superficies de distancia total constante desde un foco a la superficie y de vuelta al otro foco.

Como en 2D el elipsoide óptimo es tangente a la curva restricción.

El vector normal (rojo) puede escribirse como comb. lineal de los vectores normales de las superficies restricción.



$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)$$