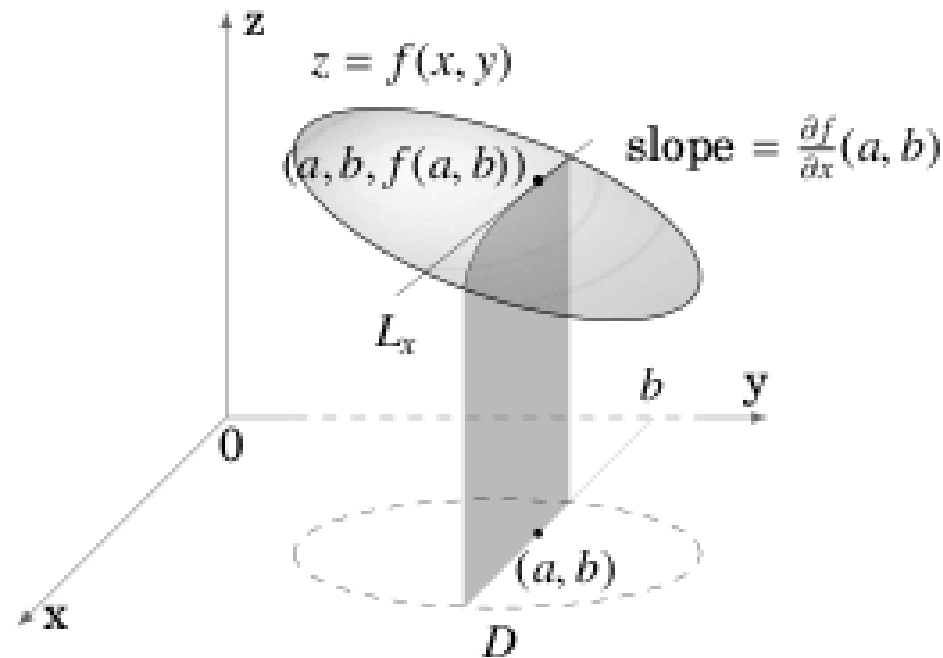


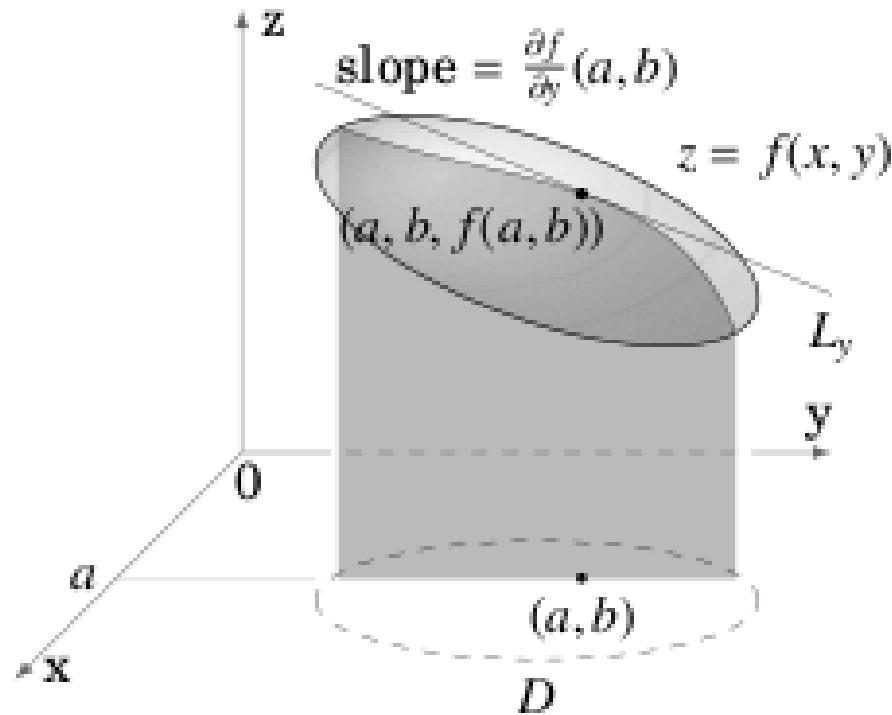
Matemáticas II

Derivadas direccionales. Gradiente de una función real (o campo escalar)

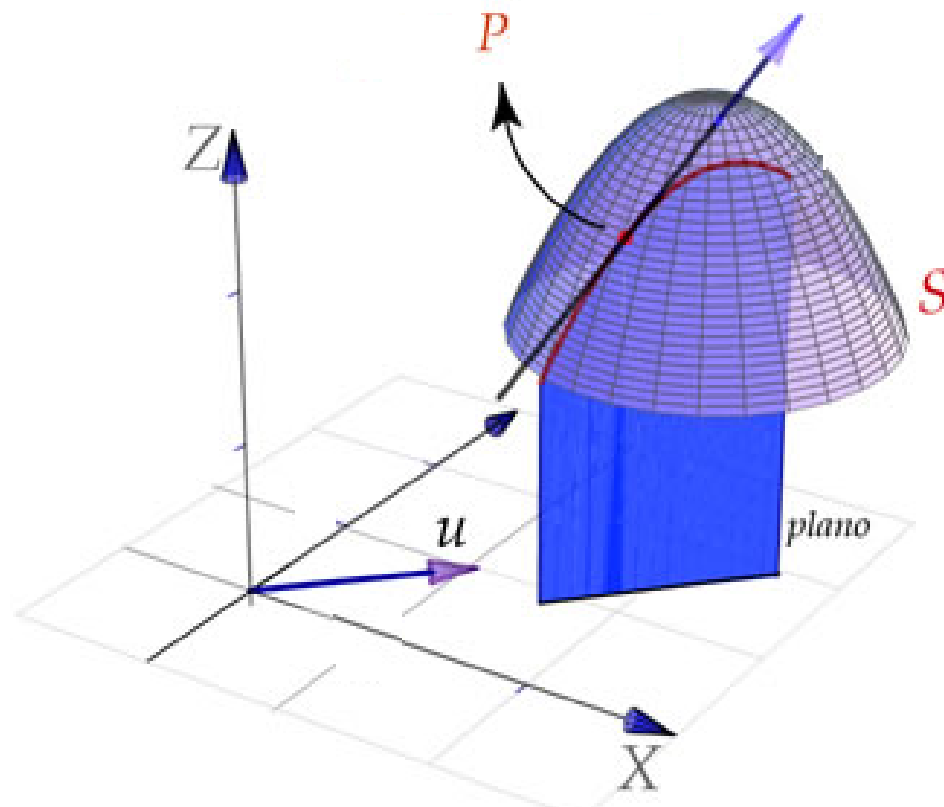
Tasa de cambio de f en dirección de x



Tasa de cambio de f en dirección de y



¿y en otra dirección?



clic!

Definición Derivada Direccional

Sean $f(x,y)$ una función real definida en un dominio D contenido en $\mathbb{R}^2$, (a,b) un punto de D y $\mathbf{v}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^2$. Se define la derivada direccional de f en (a,b) en la dirección de $\mathbf{v}$ como

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + h\mathbf{v}) - f(a,b)}{h}$$

$$\text{Si } \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv_1, b + hv_2) - f(a,b)}{h}$$

Recuérdese que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

es decir, si $\mathbf{v} = \mathbf{i} = (1, 0)$ resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{\mathbf{i}} f$$

Análogamente (¡escribábase!) si $\mathbf{v} = \mathbf{j} = (0, 1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_{\mathbf{j}} f.$$

Teorema

Sean $f(x,y)$ un función real definida en un dominio D contenido en $\mathbb{R}^2$ cuyas derivadas parciales existen y son continuas en D , (a,b) un punto de D y $\mathbf{v}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$D_{\mathbf{v}}f(a, b) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Nótese que $D_{\mathbf{v}}f(a, b) = \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$

Gradiente **RAE**

Para una función real de dos variables $f(x,y)$, el gradiente de f , $\text{grad}(f)$ o ∇f , es el vector de $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Para una función real de tres variables $f(x,y,z)$, el gradiente de f , $\text{grad}(f)$ o ∇f , es el vector de $\mathbb{R}^3$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Corolario $D_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f$

Ejercicio

Encontrar la derivada direccional de $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ en el punto $(1,2)$ en la dirección de $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

pensando en el vector gradiente

$f(x,y)$ continuamente
diferenciable; $\text{grad}(f) \neq 0$

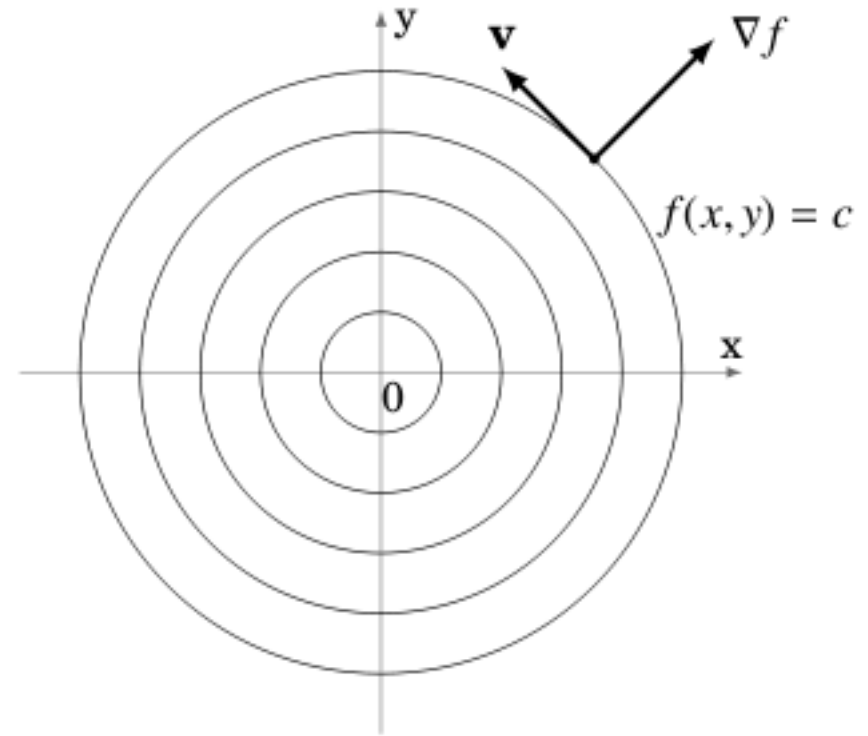
$\mathbf{v}$ vector unitario tg. a la
curva de nivel $f(x,y)=c$

$D_{\mathbf{v}}f = ?$

$$D_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f = \|\mathbf{v}\| \|\nabla f\| \cos \theta$$

$$D_{\mathbf{v}}f = \|\nabla f\| \cos \theta.$$

$$D_{\mathbf{v}}f = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$



$$\nabla f \perp \mathbf{v}$$

seguimos pensando ...

$$D_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f = \|\mathbf{v}\| \|\nabla f\| \cos \theta$$

En un punto dado (a,b) $\text{grad}(f)$ es un cierto valor fijo, y el valor de $D_{\mathbf{v}}f$ varía entonces conforme el ángulo Θ lo hace.

$D_{\mathbf{v}}f$ alcanza su máximo cuando $\cos \Theta = 1$ ($\Theta = 0^\circ$) y su valor mínimo cuando $\cos \Theta = -1$ ($\Theta = 180^\circ$).

En otras palabras, **f aumenta más rápido en la dirección de $\text{grad}(f)$ y disminuye más rápido en la dirección de $-\text{grad}(f)$.**

Ejercicio

¿En qué dirección aumenta más rápidamente la función $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ desde el punto $(1,2)$? ¿Y en qué dirección decrece más rápidamente?

Otro ejercicio

Los últimos resultados son válidos para funciones reales de 3 o más variables. La derivada direccional de funciones tales puede ser evaluada también por la fórmula que multiplica escalarmente el vector $\mathbf{v}$ y el gradiente de la función en el punto.

La temperatura T de un sólido está dada por la función $T(x,y,z)=e^x + e^{-2y} + e^{4z}$, donde x,y,z son las coordenadas relativas al centro del sólido. ¿En qué dirección a partir del punto $(1,1,1)$ decrece la temperatura más rápidamente?