

Matemáticas II

Cambio de variables en integrales múltiples

en una variable ...

Calcular $\int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$

Veámoslo con un poco más de detalle: Primero hacemos $u=x^2-1$. En el intervalo de integración $[1,2]$ la función $x \mapsto x^2-1$ es estrictamente creciente (y lleva $[1,2]$ en $[0,3]$): admite entonces función inversa (definida en $[0,3]$). Es decir, en $[0,3]$ podemos definir x como función de u ,
$$x=g(u)=\sqrt{u+1}$$

en una variable ...

Sustituyendo x por $g(u)$ en $f(x)=x^3\sqrt{x^2-1}$ tenemos

$$f(x) = f(g(u)) = (u+1)^{3/2} \sqrt{u}$$

y

$$\frac{dx}{du} = g'(u) \Rightarrow dx = g'(u) du$$

$$dx = \frac{1}{2}(u+1)^{-1/2} du ,$$

$$g(0) = 1 \Rightarrow 0 = g^{-1}(1)$$

$$g(3) = 2 \Rightarrow 3 = g^{-1}(2)$$

de donde

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2}(u+1) \sqrt{u} du = \int_0^3 (u+1)^{3/2} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}(u+1)^{-1/2} du$$

en una variable ...

Resumiendo:
$$\int_1^2 f(x) dx = \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(2)} f(g(u)) g'(u) du$$

En general, si $x=g(u)$ es una función inyectiva y derivable de un intervalo $[c,d]$ a un intervalo $[a,b]$ (lo que significa que $g'(u) \neq 0$ en (c,d)), tal que $a=g(c)$ y $b=g(d)$, entonces $c=g^{-1}(a)$ y $d=g^{-1}(b)$ y

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

Esta expresión es la llamada fórmula del cambio de variable para la integral unidimensional.

Cambio de variable en integrales dobles

Si $x=x(u,v)$ e $y=y(u,v)$ definen una función “uno-a-uno” de una región R' del plano uv a una región R del plano xy tal que el determinante

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobiano de
 x e y r. de u y v

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

es no nulo en R' , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA(x, y) = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dA(u, v)$$

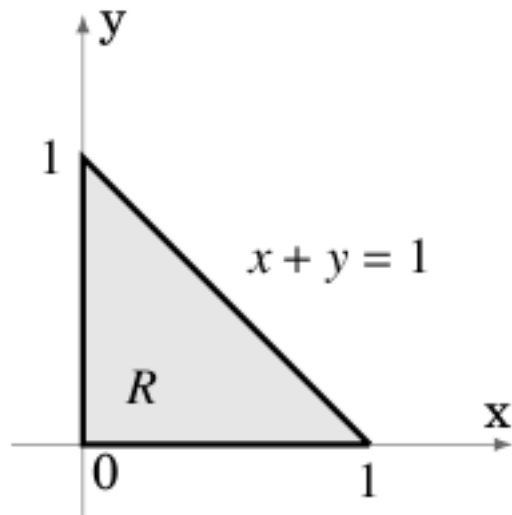
$$dA(x, y) = |J(u, v)| dA(u, v)$$

$$dx = g'(u) du$$

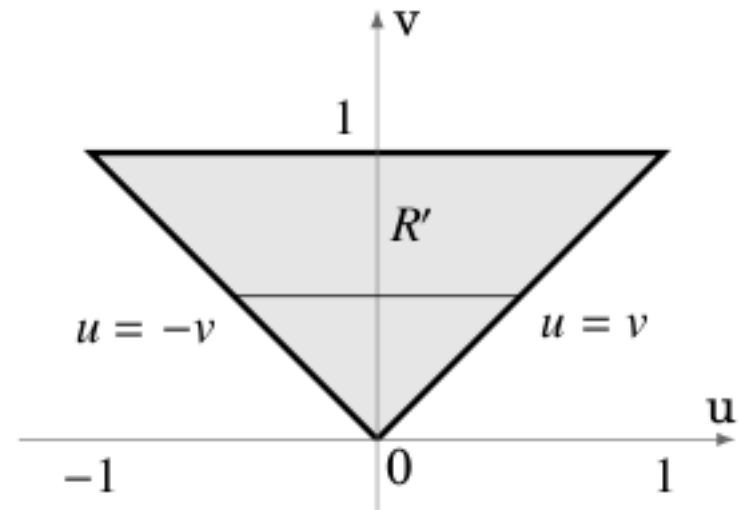
Ejemplo

Calcular $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA$ siendo $R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

Usaremos la sustitución $u=x-y$, $v=x+y$:
 $x=(u+v)/2$, $y=(v-u)/2$



$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u + v) \\ y &= \frac{1}{2}(v - u) \end{aligned}$$



$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow |J(u, v)| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA &= \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dA \\ &= \int_0^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{v}{2} e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2} (e - e^{-1}) dv \\ &= \frac{v^2}{4} (e - e^{-1}) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{e^2 - 1}{4e} \end{aligned}$$

Cambio de variable en integrales triples

Si $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$ y $z=z(u,v,w)$ definen una función “uno-a-uno” de un sólido S' del espacio uvw a un sólido S del espacio xyz tal que el determinante

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es no nulo en S' , entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dV(x, y, z) = \iiint_{S'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| dV(u, v, w)$$

Integrales dobles en coord. polares

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{and} \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \Rightarrow |J(u, v)| = |r| = r$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Ejercicios

- Encontrar el volumen interior al paraboloide $z=x^2+y^2$ y por debajo de $z=1$
- Id. para el cono $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Búsqueda (cilíndricas, esféricas)

Cálculo de los jacobianos

Utilizando las segundas, calcular el volumen de una esfera de radio r mediante una integral triple.

Aplicación: Centro de Masa

Consideremos una región plana (una “lámina”) R cuya densidad en el punto (x,y) viene dada por $\delta(x,y)$. La masa M de la lámina es

$$M = \iint_R \delta(x,y) dA$$

,

las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masas de R

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{and} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

donde

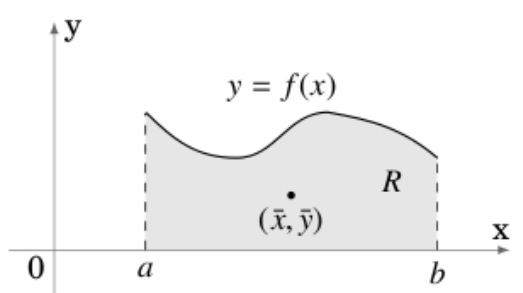
$$M_y = \iint_R x\delta(x,y) dA, \quad M_x = \iint_R y\delta(x,y) dA$$

son los

primeros momentos de R respecto de y y x , resp.

Aplicación: Centro de Masa

Si la región es $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$,
siendo f continua, y R tiene densidad uniforme,
el centro de masas de R $(\bar{x}, \bar{y})$



$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{and} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

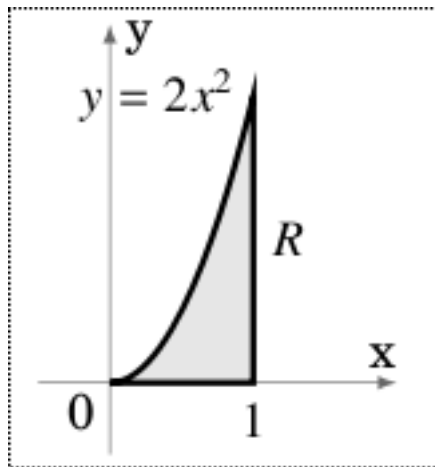
viene dado por

$$M_x = \int_a^b \frac{(f(x))^2}{2} dx, \quad M_y = \int_a^b x f(x) dx, \quad M = \int_a^b f(x) dx$$

donde se ha tomado $\delta(x, y) = 1$ para mayor sencillez.

Aplicación: Centro de Masa

Ejemplo: Calcular el centro de masas de la región $R = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x^2\}$ si la densidad en el punto (x,y) es $x+y$.

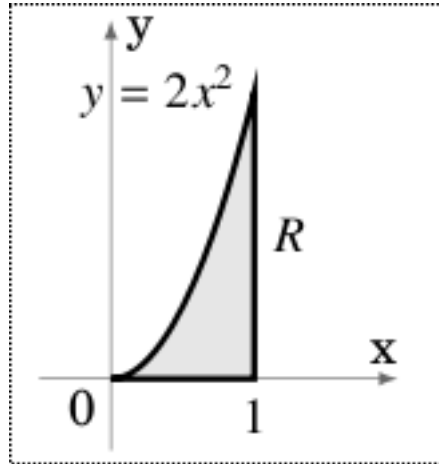


$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R y\delta(x, y) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} y(x + y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(2x^5 + \frac{8x^6}{3} \right) dx \\
 &= \frac{x^6}{3} + \frac{8x^7}{21} \Big|_0^1 = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_R x\delta(x, y) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} x(x + y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 (2x^4 + 2x^5) dx \\
 &= \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{3} \Big|_0^1 = \frac{11}{15} ,
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{11/15}{9/10} = \frac{22}{27} , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{5/7}{9/10} = \frac{50}{63}$$

Sitúese aproximadamente el centro de masas de la región:



¿Dónde estaría el cdm si la densidad fuera constante? (en este caso, el cdm se llama centroide)

Las fórmulas para el centro de masas de una región plana R pueden ser generalizadas a un sólido S en $\mathbb{R}^3$. Sea S un sólido con función densidad de masa $\delta(x,y,z)$ continua en todo S .

El centro de masa de S es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ donde

$$M_{yz} = \iiint_S x\delta(x,y,z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_S y\delta(x,y,z) dV, \quad M_{xy} = \iiint_S z\delta(x,y,z) dV$$

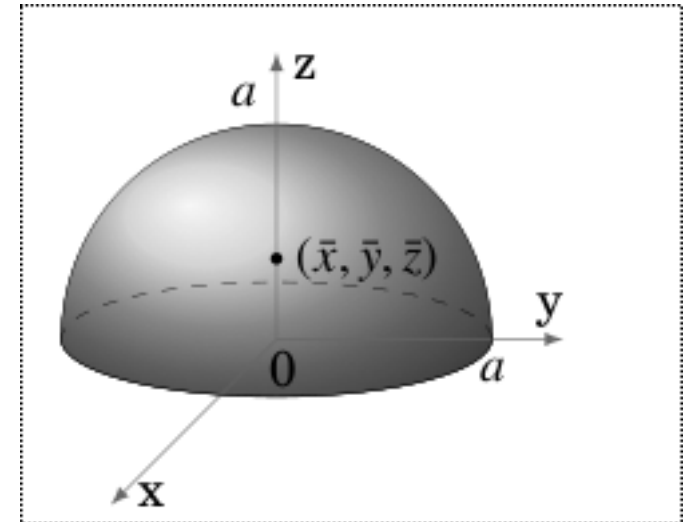
$$M = \iiint_S \delta(x,y,z) dV.$$

M es la masa de S y M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} son los (primeros) momentos de S alrededor de los planos yz , xz y xy , resp.

Ejercicio. Calcular el centroide del hemisferio norte de una esfera de radio a .

$$M = \iiint_S \delta(x, y, z) dV = \iiint_S 1 dV = \text{Volume}(S).$$

$$M = \frac{2\pi a^3}{3}$$



$$M_{xy} = \iiint_S z \delta(x, y, z) dV$$

$$= \iiint_S z dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \left(\int_0^a \rho^3 d\rho \right) d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{4} \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{8} \sin 2\phi d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^4}{16} \cos 2\phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{8} d\theta$$

$$= \frac{\pi a^4}{4},$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3a}{8} \right)$$