

Sage: Una aplicación libre para matemáticas

F. Botana^a, J. Escribano^b, M. Á. Abánades^c

^a Departamento de Matemática Aplicada I, EUIT Forestal, Universidad de Vigo,
Campus A Xunqueira, Pontevedra.

^b Departamento de Sistemas Informáticos y Computación, Facultad de Informática,
Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

^c Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas, Centro de Estudios Superiores Felipe II,
Universidad Complutense de Madrid, Aranjuez, Madrid.

Resumen

Sage es un software que nos permite experimentar con las matemáticas. Gratuito y de código abierto, constituye la apuesta más novedosa para utilizar las TIC en nuestro ámbito. La integración de múltiples herramientas, la posibilidad de acceso remoto por Internet y el énfasis por la decencia y la libertad conforman sus más notables características. Por su potencia y versatilidad auguramos que Sage se convertirá en el estándar de facto para la enseñanza con ordenador en las matemáticas de niveles medio y superior.

Palabras clave

Divulgación, Matemáticas computacionales, Experimentación, Software matemático, Secundaria, bachillerato y universidad.

Abstract

Sage is a computer application that allows direct experimentation with mathematics. Free and open source, it is the newest asset to use ICT in our area. The integration of multiple tools, the possibility of remote access via the Internet and the emphasis for decency and freedom make their most notable features. For its power and versatility we foresee Sage as the *de facto* standard for teaching mathematics with computers in secondary and university levels.

Keywords

Divulgation, Computational Mathematics, Experimentation, Mathematical software, High school and university.

Introducción

En los últimos números de Suma hemos leído con interés y agrado un artículo (Rodríguez 2009) y dos partes de una trilogía (Real 2009-1 y Real 2009-2) sobre un sistema de cálculo simbólico, Maxima (<http://maxima.sourceforge.net/>). Insistiendo en el empeño queremos contribuir con estas notas a la difusión entre el profesorado de una herramienta nueva probablemente útil para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: *Sage, Software for Algebra and Geometry Experimentation* (<http://www.sagemath.org/>). Sage, de hecho, incluye Maxima, además de ofrecer otras nuevas potencialidades para su uso en las aulas.

En este artículo esbozamos en la primera sección el origen de Sage y las motivaciones de su desarrollo, así como algunas reflexiones sobre la libertad. La segunda sección trata sobre las computadoras que pueden ejecutarlo e introduce el *notebook* de Sage, una aplicación para ejecutar Sage desde un navegador web. En la tercera sección se ilustran brevemente algunas características del software y se hace un rápido repaso de algunas de sus posibilidades de cómputo en relación con la enseñanza. La cuarta sección explica cómo y dónde descargarlo y usarlo, y proporciona algunos enlaces y referencias para aprender más y para instalar un servidor de Sage propio accesible a través de Internet. Concluimos con una muestra de las posibilidades que nos ofrece Sage, sacando todo el rendimiento al modelo de desarrollo del software libre.

Historia de Sage

El creador de Sage es William Stein (<http://wstein.org/>), profesor de la Universidad de Washington. Stein tiene una gran experiencia en la utilización de sistemas de álgebra computacional (CAS, por sus siglas inglesas) para el estudio de problemas en teoría de números. Después de trabajar con diversos sistemas, utilizó y ayudó a desarrollar el sistema Magma (<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>), un CAS comercial muy especializado desarrollado en Australia. Su amplio conocimiento de Magma le permitió ver las dificultades que entraña el modelo de software comercial en general, y del software científico comercial en particular. A pesar de descubrir y documentar fallos en el sistema Magma, los propietarios del sistema no se mostraron muy partidarios de corregirlos. Es más, tampoco se mostraron especialmente comunicativos a la hora de explicar en detalle el funcionamiento de ciertos algoritmos fundamentales. Lo cual, tratándose de software para el tratamiento de las matemáticas, viene a ser como si un matemático nos dijera que un teorema es cierto, pero se negase a darnos la demostración alegando cuestiones de privacidad comercial.

Después de varios encontronazos con los desarrolladores de Magma, en el año 2004 Stein tiene la

loca idea de crear un CAS gratuito de código abierto, un CAS que cualquier estudiante o profesor pudiese utilizar sin restricciones de ningún tipo (incluyendo las económicas) y que fuese científicamente riguroso, en el sentido de que todos los algoritmos y métodos utilizados pudieran ser conocidos y mejorados por cualquiera. En palabras de Stein, la misión de Sage era “*creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab*” (crear una alternativa libre y de código abierto a Magma, Maple, Mathematica y Matlab). David contra Goliat.

La empresa parecía titánica, pero no se partía de cero. Había muchas cosas que hacer, pero algunas ya estaban hechas y se podían utilizar: Maxima, Singular, GNUPlot,...No se trataba de inventar la rueda sino de construir un coche. Pronto la idea empezó a entusiasmar a numerosos especialistas en el área y la loca idea empezó a tomar cuerpo. Curiosamente, una amenaza de los creadores de Magma (ver Stein 2009) impulsó definitivamente el proyecto de modo que en febrero de 2006 aparecía la versión 1.0 de la aplicación. La historia de Sage acaba de empezar...

Algunas otras consideraciones acerca de Sage y del software matemático libre en general pueden encontrarse en Abánades et al. (2009)

Cómo utilizar Sage

Utilizar Sage es bastante sencillo una vez que hemos tenido en cuenta algunos detalles. Para empezar, Sage se puede utilizar de varias formas distintas, siendo la instalación clásica en nuestro propio PC una de ellas. Pero también podemos utilizarlo sencillamente lanzando un LiveCD (disponible en <http://www.sagemath.org/download.html>) o, mejor aún, sin instalar ni descargar nada, solamente conectándonos a Internet.

La instalación en un PC es sencilla, pero depende fundamentalmente del sistema operativo que utilices. Si usas Mac o GNU/Linux la instalación no puede ser más simple: descárgate el fichero correspondiente (de <http://www.sagemath.org/download.html>), descomprímelo y ejecútalo. Todo funciona a la primera. Si utilizas un sistema Windows la instalación es algo más laboriosa (ya que Sage, de momento, no tiene una versión nativa para Windows, aunque Microsoft está subvencionándola). Te damos más detalles sobre la instalación bajo Windows un poco más adelante. En todo caso, para instalar Sage en tu PC lo mejor es visitar su página web y seguir los enlaces (un poquito de inglés será de gran ayuda).

Pero suponemos que de momento optarás por la solución más cómoda, que es seguir leyendo sin descargarte nada, y tal vez probar la opción más rápida: usar Sage a través de Internet. Aunque es posible usar cualquier navegador, por razones de seguridad y facilidad de uso te sugerimos el uso de

Firefox (<http://www.mozilla.com>).

Para un primer contacto con Sage, desde tu navegador puedes visitar alguna de las siguientes direcciones:

<http://sagenb.org>

<https://sagenb.kaist.ac.kr:8022/>

Te recomendamos utilizar la primera, que es la canónica. La segunda, aunque lejana pues el servidor está físicamente en Corea del Sur, presenta la particularidad de que vive siempre el mismo día: a las 6:00 a.m. todo se pone a cero y ¡vuelta a empezar! Podremos, como Bill Murray en *Atrapado en el tiempo*, hacer lo que queramos sin que nuestros actos tengan consecuencia alguna. Si te decides por esta segunda (o cualquier otro servidor de Sage que use el protocolo seguro https) encontrarás un aviso de seguridad del navegador como el mostrado en la Figura 1.



Figura 1. Advertencia de seguridad cuando accedemos a un servidor seguro Sage.

En este caso, éste es un mensaje estándar y es seguro aceptar la excepción. Para ello haz clic en *Entiendo los riesgos*, después en *Añadir una excepción* y por último en *Confirmar excepción de seguridad*. Deberías entonces ver en tu pantalla la Figura 2. Estás en la página inicial del cuaderno de trabajo de Sage, el *notebook*.

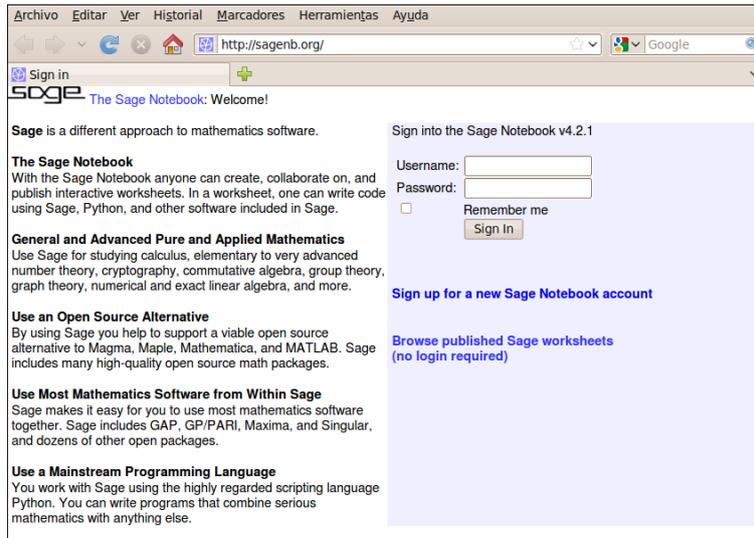


Figura 2. La pantalla inicial del notebook de Sage.

En la parte derecha de la pantalla puedes ver dos enlaces (en azul): el de abajo ofrece la posibilidad de curiosear por las hojas de trabajo, *worksheets*, de otros usuarios, sin necesidad de registrarse. Es interesante hacerlo, pero ten en cuenta que la mayoría de las hojas están en inglés y son documentos sin pulir; además, no podrás ejecutarlos (aunque sí copiarlos una vez tengamos nuestra propia cuenta). Con el enlace de arriba, en cambio, puedes hacerte con una cuenta en ese servidor (¡no, no es necesario enviar ningún SMS!). Hazlo, y empezaremos a usar el notebook. Puede que tengas algún problema con la velocidad de la red. Los servidores de sagenb.org están físicamente en el estado de Washington (EE.UU.) y, aunque están mejorando continuamente, todavía no tienen la potencia de los servidores de Google.

Una vez dentro del sistema encontrarás una pantalla como la que muestra la Figura 3. En ella, haz clic en *New Worksheet* y renombra la hoja si el sistema te lo pide.

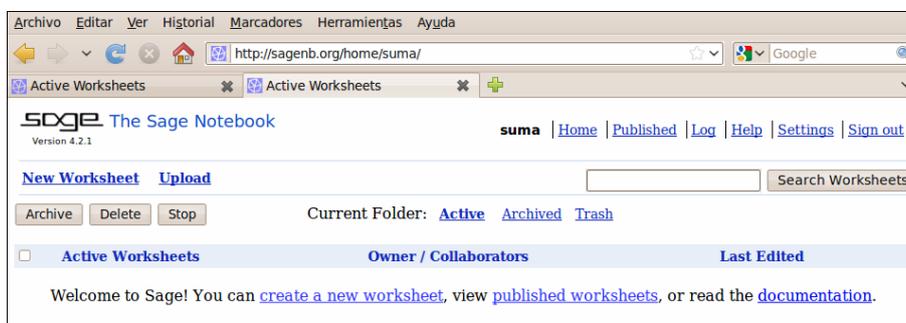


Figura 3. El notebook al entrar por primera vez como usuario/a con cuenta.

Ya puedes empezar a hacer cálculos: haz clic en la celdilla y escribe algo sencillo, por ejemplo, $2*3$.

Si evalúas (clic en *evaluate* o *shift+Enter* o, en algún Mac, *shift+Return*) obtendrás lo esperado, tal como muestra la Figura 4.

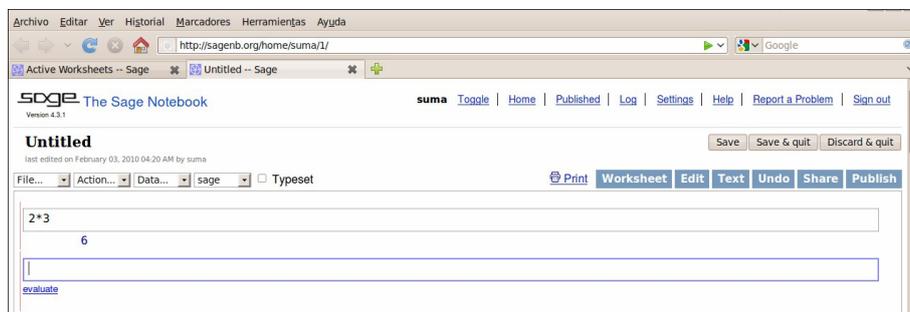


Figura 4. Celdillas de trabajo del notebook de Sage

Si has escogido instalar Sage o probar con el LiveCD, sigue las instrucciones de instalación y ejecuta la aplicación. Encontrarás una pantalla de texto que más o menos dice

```
-----  
| Sage Version 4.2, Release Date: 2009-10-24 |  
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |  
-----  
sage:
```

Teclea `notebook()`, luego *Enter* y se lanzará el navegador con una página local como la mostrada en la Figura 3. A partir de ahí se procede igual que en el acceso web.

Trabajando en el notebook de Sage

En la sección anterior ya has hecho tu primer cálculo. Aquí insistimos con otros ejemplos para que te hagas una idea de cómo funciona el notebook. Mostramos lo que has de escribir alineado a la izquierda y la salida en el mismo tipo de letra indentada a la derecha. Por ejemplo el cálculo anterior será

```
2*3  
6
```

Hay dos comandos clásicos al demostrar las posibilidades de un sistema de cálculo: el primero se refiere a la impresión

```
print "hola,"; print "mundo!"  
hola,  
mundo!
```

y el segundo es el factorial. ¡Un momento! ¿Cómo se invoca: `!`, `fact`, ...? Si escribimos `fac` y apretamos *Tab* obtenemos todos los comandos que empiezan por esas letras

```
fac (+ Tab)
      factor factorial factorization
```

y clicando en la segunda queda escrita como entrada. Para decidir si es la adecuada podemos pedir ayuda añadiendo una interrogación después del comando

```
factorial?
```

con lo que aparece un cuadro de texto como el parcialmente mostrado en la Figura 5, que resuelve la duda.

```
File: /opt/sage/sage-4.2-linux-Ubuntu_9.04-i686-Linux/local/lib/python2.6/site-packages/sage/functions/other.py
Type: <class 'sage.functions.other.Function_factorial'>
Definition: factorial(n, **kwds)
Docstring:
Returns the factorial of n.
```

Figura 5. Fragmento de la ayuda relativa al comando factorial.

Si añadimos un segundo signo de interrogación obtendremos el código fuente usado en la evaluación del comando, dando así libertad al usuario para comprobar la corrección de los algoritmos usados.

Una de las características más llamativas de los sistemas de cálculo es su capacidad para obtener representaciones gráficas precisas. La sintaxis de Sage en este aspecto es parecida a la de Mathematica. Por ejemplo

```
plot(sin, (-pi, pi))
```

y

```
var('y'); plot(sin(y), (y, -pi, pi))
```

devuelven la gráfica esperada (Figura 6). Nótese que en la última línea hay que declarar explícitamente la variable usada.

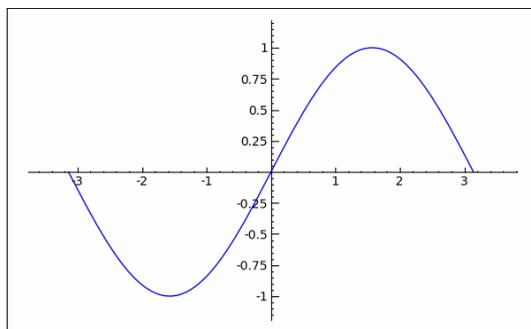


Figura 6. Gráfica del seno devuelta por Sage.

En cuanto a representación tridimensional, Sage integra un applet, *Jmol*, mediante el cual es posible

interactuar desde el notebook con la superficie representada. Por ejemplo, la siguiente orden dibuja un cono de eje z (Figura 7)

```
var('x y z'); implicit_plot3d(x^2+y^2-z^2, (x, -2, 2), (y, -2, 2), (z, -2, 2))
```

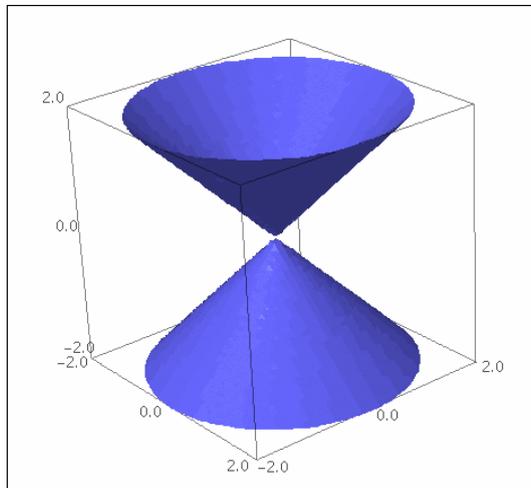


Figura 7. El cono $z^2=x^2+y^2$.

El cálculo de límites, derivadas, integrales,... es también el usual en estos sistemas

```
lim((1+1/x)^x, x=oo)
e
diff(sin(x)*log(x^(1/x)), x)
-(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x)
integrate(-(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x))
log(x)*sin(x)/x
maxima.taylor(cos(x), x, 0, 4)
1-x^2/2+x^4/24
```

Esta última computación (y algunas de las anteriores, si bien de manera no tan explícita) recurre a Maxima: las capacidades de cálculo simbólico en Sage son, en gran parte, deudoras de Maxima.

Esto es un ejemplo concreto de la filosofía de Sage ya mencionada: no reinventa la rueda, construye un coche. Si un software para un determinado campo es libre y es eficiente se incorpora al sistema. Por ejemplo, en <https://kimba.mat.ucm.es:9000/home/pub/5/> puede verse una hoja de trabajo en Sage que permite calcular la envolvente de un tipo especial de escaleras (las que se deslizan por una pared experimentando, mientras lo hacen, una variación de su longitud). Puesto que los cálculos necesarios para la obtención de la envolvente involucran eliminación de variables en anillos de polinomios se usa un programa específico para ello, Singular (<http://www.singular.uni-kl.de/>). Aunque teóricamente podría usarse Maxima para ello, nos ha resultado más cómodo utilizar aquel. Otra muestra más de libertad dentro de Sage.

Ha de notarse que esta hoja de trabajo ilustra además otra valiosa aportación del notebook de Sage: la posibilidad de incrustar applets en las hojas de trabajo, como muestra la Figura 8 respecto a GeoGebra (<http://www.geogebra.org/>).

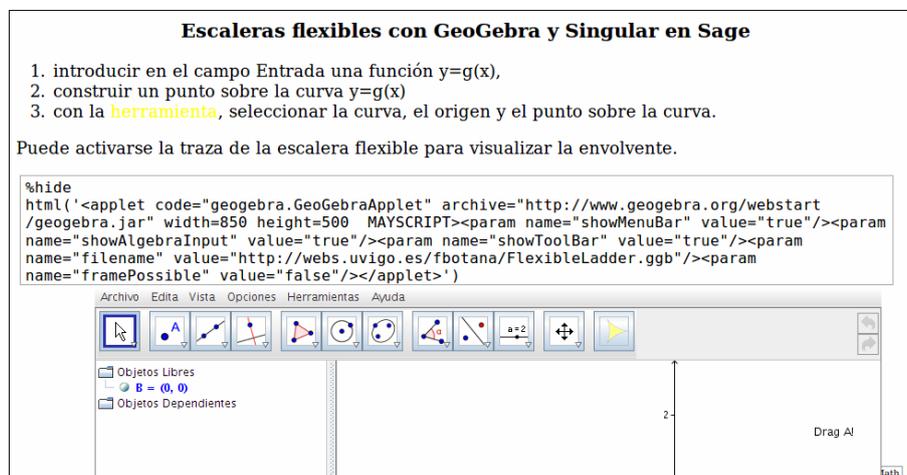


Figura 8. GeoGebra dentro del notebook de Sage

No es el objetivo de este artículo ser un manual de Sage, sino simplemente dar noticia de su existencia y utilidad. Quien lea esto sabrá sin duda por propia experiencia que cuando realmente se aprende es cuando se hace. Como verdaderos documentos de referencia se pueden citar varios, todos descargables del sitio sagemath.org. El manual de Sage (The Sage Development Team 2010), nos familiarizará con el sistema en pocas horas. Si buscamos escritos en castellano, sugerimos Tábara (2009) para ver las posibilidades matemáticas de Sage y una traducción castellana (Yanjara 2008) de un manual para principiantes (Kosan 2007).

La instalación en un sistema MS-Windows

Aunque la manera más cómoda de acercarse a Sage es a través de Internet, donde además se tiene acceso a las hojas de trabajo de otros usuarios y podemos compartir el trabajo con nuestros colaboradores, en muchas situaciones es conveniente tener instalado Sage en nuestro PC.

Como ya hemos indicado, la instalación de Sage en un Mac o PC bajo GNU/Linux consiste básicamente en descargar el fichero adecuado. La instalación de Sage en un entorno Windows no es mucho más difícil, pero, al no existir una distribución nativa para Windows, nos obliga a proceder con algo de cuidado.

En primer lugar, tenemos que bajar el fichero de instalación de Sage para Windows, que se

encuentra en <http://www.sagemath.org/download-windows.html> . Podemos bajarlo de cualquiera de los servidores secundarios (*mirrors*) disponibles, por ejemplo, de RedIris:

<http://sunsite.rediris.es/mirror/sagemath/win/sage-virtualbox-4.3.zip>.

Es un fichero grande (1 GB), con lo que incluso con las mejores conexiones su descarga va a llevarnos cerca de una hora. A continuación, descomprimos este fichero .zip.

Antes de seguir con la instalación, tenemos que instalar una aplicación auxiliar. Se trata de un programa gratuito de código abierto, *VirtualBox*, en la versión de nuestro sistema operativo. Grosso modo, este programa nos va a permitir simular un entorno GNU/Linux en nuestro PC de modo que podamos usar Sage sin cambiar de sistema operativo. Lo encontraremos en <http://www.virtualbox.org/>. Es ilustrativo el hecho de que para instalar VirtualBox tengamos que hacer frente a nada menos que seis *amenazas*, aceptando el riesgo que, según Windows, supone la instalación de una aplicación no reconocida por Microsoft, aunque tenga las garantías de *Sun Microsystems*, empresa pionera y líder en el sector de la computación. Este riesgo es, por otra parte, inexistente

Una vez instalado VirtualBox, desde el menú *Archivo*, elegimos *Importar servicio virtualizado* y seleccionamos el fichero *sage.ovf* de la carpeta *sage-virtualbox-4.3* que está dentro de la carpeta que se generó al descomprimir el archivo *sage-virtualbox-4.3.zip*. Tanto el proceso de instalación de VirtualBox como la importación de Sage desde VirtualBox puede tardar varios minutos.

Una vez instalado Sage, desde la ventana de VirtualBox, iniciamos la máquina virtual Sage, abrimos nuestro navegador con la dirección que nos indica la máquina virtual...y ¡ya está funcionando nuestro notebook!

Nuestra versión de Sage, a pesar de está instalación algo más laboriosa, es plenamente operativa. Todas las hojas de trabajo se guardan en la máquina virtual. Podemos descargarlas todas juntas a un fichero comprimido de nombre *download_worksheets.zip*. Para ello, basta hacer clic en el enlace *Download All Active* en la lista de las hojas activas. Este fichero contiene todas nuestras hojas de trabajo, y se guarda en el directorio de descargas por defecto de nuestro ordenador. Estas hojas se pueden utilizar en cualquier otro ordenador donde tengamos instalado Sage, o en un servidor Sage, subiendo el fichero con el comando *upload*.

Posibilidades de desarrollo

El modelo propio de desarrollo de software libre que se aplica en Sage, en el que grupos de

matemáticos y programadores colaboran juntos para mejorar constantemente el sistema, permite que nuevas funcionalidades e ideas de utilización surjan cada día. A este respecto, la regular visita a los grupos de Google relativos a Sage es recomendable para quienes tengan interés en mantenerse informados (en inglés) de las novedades en este sistema. Para encontrarlos basta teclear *sage google* y alguna de las palabras *edu*, *notebook* o *support* en cualquier buscador.

Como hemos visto, Sage se puede utilizar vía web siendo posible compartir hojas de trabajo con otros usuarios. Esto abre ilimitadas posibilidades de aplicación en el ámbito docente: clases guiadas en laboratorio, tareas a realizar en casa, trabajos en grupo... Sin embargo, el uso habitual de servidores Sage ajenos puede suponer una limitación técnica. Por ello, de cara a un uso en un contexto amplio, como el de un instituto o una universidad, lo más conveniente es instalar un servidor Sage propio.

Montar un servidor Sage propio, si bien no es una tarea demasiado complicada, sí requiere algunos conocimientos de GNU/Linux y del funcionamiento de un servidor web. Las instrucciones que da Dan Drake en <http://wiki.sagemath.org/DanDrake/JustEnoughSageServer> garantizan razonables posibilidades de éxito: basta VirtualBox y una distribución de GNU/Linux sencilla (Jeos) para crear nuestro propio servidor web.

Probablemente haya en tu centro algún ordenador al que los virus de Windows y la obsolescencia planificada de nuestra sociedad de consumo hayan arrinconado: ¡Ese es el equipo perfecto para instalarle Ubuntu y crear la máquina virtual que permita ejecutar Sage remotamente!

Otra posibilidad de uso de Sage algo más complicada es ejecutar directamente cálculos en Sage a través del protocolo http sin utilizar necesariamente un navegador web. Esto nos permite, de modo transparente para el usuario, acceder a la potencia de Sage sin necesidad de entrar en una cuenta. Aunque esta característica exige ciertos conocimientos de programación, pensamos que abre vías para la elaboración y uso de nuevos materiales educativos que antes estaban condicionadas por el uso de aplicaciones comerciales caras. La información relativa a esta posibilidad puede encontrarse en <http://sagemath.org/doc/reference/sagenb/simple/twist.html>.

Referencias bibliográficas

- Abánades, M. A., Botana, F., Escribano J. y Tabera, L. F. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 12 (2) 325-346.
<http://itis.cesfelipesecondo.com/secciones/WebPersonal/archivos/1/OpenSourceMath-Gaceta-baja-res.pdf>

- Yanajara, H. (2008). *Manual de Sage para principiantes*.
http://sagemath.org/es/Manual_SAGE_principiantes.pdf
- Kosan T. (2007). *Sage for Newbies*.
http://sage.math.washington.edu/home/tkosan/newbies_book/
- Real, M. (2009). La potencia de las TIC para el cálculo simbólico. *Suma*, nº 61, 55-61.
- Real, M. (2009). El cálculo simbólico de forma gráfica. *Suma*, nº 62, 57-62.
- Rodríguez, M. (2009). Maxima, un sistema libre de cálculo simbólico y numérico. *Suma*, nº 60, 7-20.
- Stein, W. (2009). Mathematical Software and Me: a very personal recollection.
<http://modular.math.washington.edu/mathsoftbio/history.pdf>
- Tábara, J. L. (2009). *Matemáticas elementales con Sage*.
http://sagemath.org/es/Introduccion_a_SAGE.pdf
- The Sage Development Team (2010). *Sage Tutorial. Release 4.3.1*.
<http://sagemath.org/doc-pdf/en/SageTutorial.pdf>