Ampliación de Matemáticas

Cambio de variables en integrales múltiples

en una variable ...

Calcular $\int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

Veámoslo con un poco más de detalle: Primero hacemos $u=x^2-1$. En el intervalo de integración [1,2] la función $x \dashrightarrow x^2-1$ es estrictamente creciente (y lleva [1,2] en [0,3]): admite entonces función inversa (definida en [0,3]). Es decir, en [0,3] podemos definir x como función de u,

$x=g(u)=\sqrt{(u+1)}$

en una variable ...

Sustituyendo x por g(u) en $f(x)=x^3\sqrt{(x^2-1)}$ tenemos

$$\boxed{f(x) = f(g(u)) = (u+1)^{3/2}\sqrt{u}}$$

y

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{du} = g'(u) \Rightarrow dx = g'(u)\,du \\ dx = \tfrac{1}{2}(u+1)^{-1/2}\,du \end{aligned}}$$

,

$$g(0) = 1 \Rightarrow 0 = g^{-1}(1)$$

$$g(3) = 2 \Rightarrow 3 = g^{-1}(2)$$

de donde

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{u}\,du \boxed{= \int_0^3 (u+1)^{3/2}\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2}(u+1)^{-1/2}\,du}$$

en una variable ...

Resumiendo $\boxed{\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(2)} f(g(u))\,g'(u)\,du}$

En general, si x=g(u) es una función inyectiva y derivable de un intervalo [c,d] a un intervalo [a,b] (lo que significa que $g'(u)\neq 0$ en (c,d)), tal que a=g(c) y b=g(d), entonces $c=g^{-1}(a)$ y $d=g^{-1}(b)$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

Esta expresión es la llamada fórmula del cambio de variable para la integral unidimensional.

Cambio de variable en integrales dobles

Si x=x(u,v) e y=y(u,v) definen una función "uno-a-uno" de una región R' del plano uv a una región R del plano xy tal que el determinante

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobiano de x e y r. de u y v

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

es no nulo en R', entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA(x,y) = \iint_{R'} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, dA(u,v)$$

$$dA(x,y) = |J(u,v)|\, dA(u,v)$$

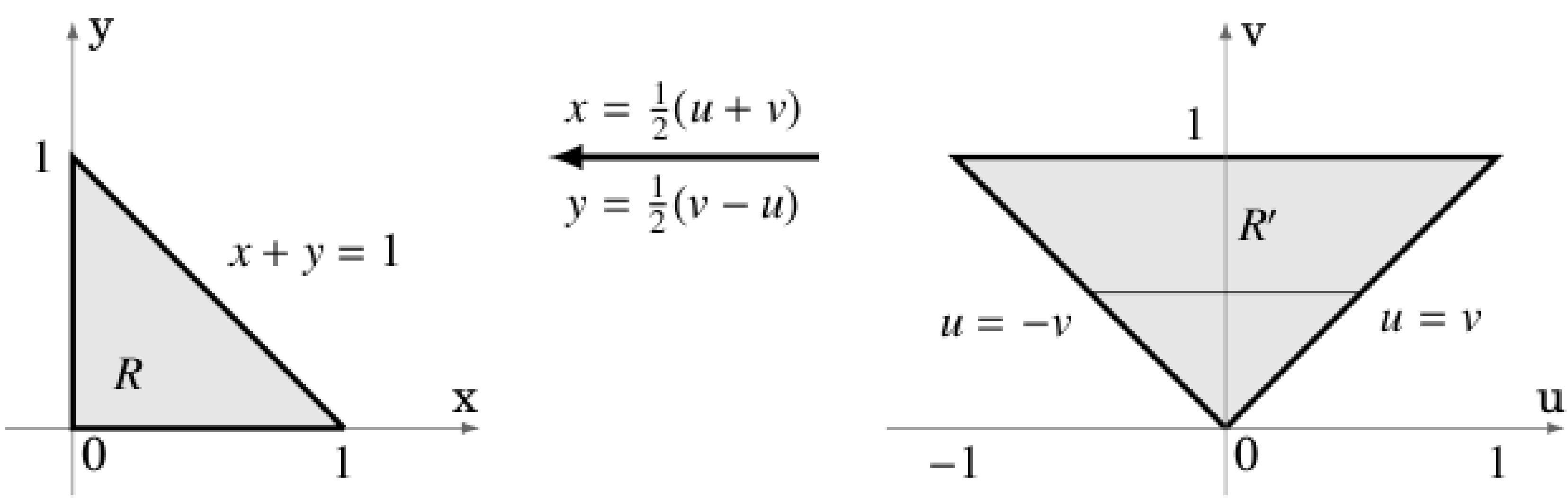
$$dx = g'(u)\, du$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dA$ siendo $R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

Usaremos la sustitución u=x-y, v=x+y:

x=(u+v)/2, y=(v-u)/2



$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow |J(u,v)| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dA &= \iint_{R'} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\ \tfrac{1}{2}\, du\, dv \\ &= \int_0^1 \left(\tfrac{v}{2} e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv \\ &= \int_0^1 \tfrac{v}{2}(e - e^{-1})\, dv \\ &= \frac{v^2}{4}(e - e^{-1}) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2 - 1}{4e} \end{aligned}}$$

Cambio de variable en integrales triples

Si x=x(u,v,w), y=y(u,v,w) y z=z(u,v,w) definen una función "uno-a-uno" de un sólido S' del espacio uvw a un sólido S del espacio xyz tal que el determinante

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es no nulo en S', entonces

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV(x,y,z) = \iiint_{S'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dV(u,v,w)$$

Integrales dobles en coord. polares

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta \quad \textbf{and} \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \Rightarrow |J(u,v)| = |r| = r$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Ejercicios

- Encontrar el volumen interior al paraboloide $z=x^2+y^2$ y por debajo de $z=1$
- Id. para el cono $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Búsqueda (cilíndricas, esféricas)

Cálculo de los jacobianos

Utilizando las segundas, calcular el volumen de una esfera de radio r mediante una integral triple.

Aplicación: Centro de Masa

Consideremos una región plana (una "lámina") R cuya densidad en el punto (x,y) viene dada por δ(x,y). La masa M de la lámina es

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$,

las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masas de R

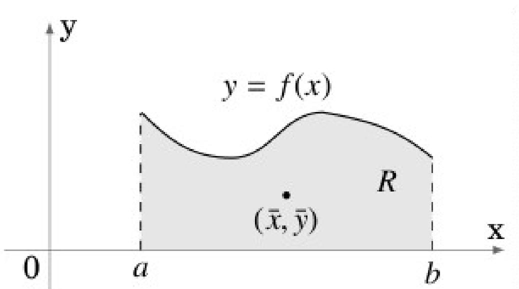
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{and} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

donde $M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$, $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA$ son los

primeros momentos de R respecto de y y x, resp.

Aplicación: Centro de Masa

Si la región es R={(x,y):a<=x<=b, 0<=y<=f(x)}, siendo f continua, y R tiene densidad uniforme,



el centro de masas de R $\boxed{(\bar{x}, \bar{y})}$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{and} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

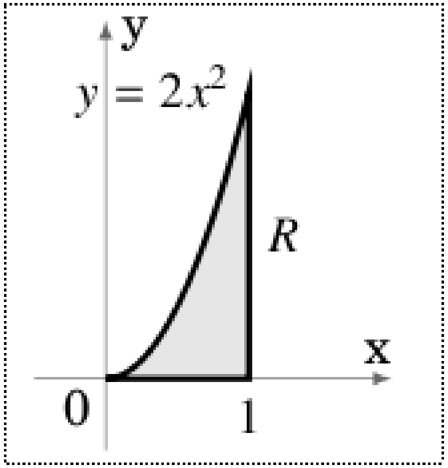
viene dado por

$$\boxed{M_x = \int_a^b \frac{(f(x))^2}{2}\, dx\,, \quad M_y = \int_a^b x f(x)\, dx\,, \quad M = \int_a^b f(x)\, dx}$$

donde se ha tomado δ(x,y)=1 para mayor sencillez.

Aplicación: Centro de Masa

Ejemplo: Calcular el centro de masas de la región $R=\{(x,y):0<=x<=1,0<=y<=2x^2\}$ si la densidad en el punto (x,y) es $x+y$.

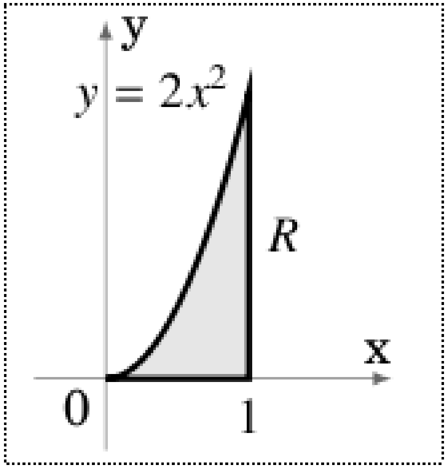


$$M_x = \iint_R y\delta(x,y)\,dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2x^2} y(x+y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx$$
$$= \int_0^1 (2x^5 + \frac{8x^6}{3})\,dx$$
$$= \frac{x^6}{3} + \frac{8x^7}{21} \Bigg|_0^1 = \frac{5}{7}$$

$$M_y = \iint_R x\delta(x,y)\,dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2x^2} x(x+y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{xy^2}{2} \Bigg|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx$$
$$= \int_0^1 (2x^4 + 2x^5)\,dx$$
$$= \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{3} \Bigg|_0^1 = \frac{11}{15}\,,$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{11/15}{9/10} = \frac{22}{27}\,, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{5/7}{9/10} = \frac{50}{63}$$

Sitúese aproximadamente el centro de masas de la región:



¿Dónde estaría el cdm si la densidad fuera constante? (en este caso, el cdm se llama centroide)

Las fórmulas para el centro de masas de una región plana R pueden ser generalizadas a un sólido S en R^3. Sea S un sólido con función densidad de masa $\delta(x,y,z)$ continua en todo S.

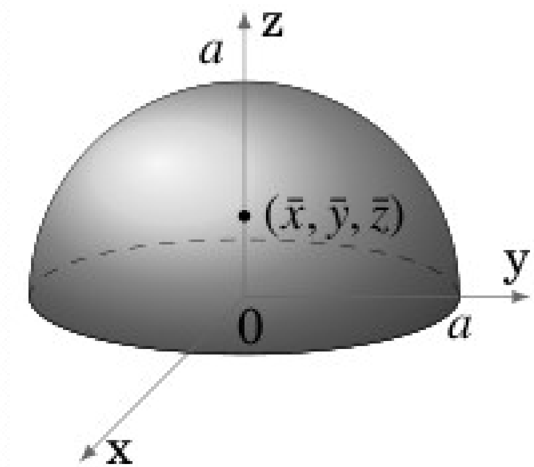
El centro de masa de S es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$M_{yz} = \iiint_S x\delta(x,y,z)\,dV\ , \quad M_{xz} = \iiint_S y\delta(x,y,z)\,dV\ , \quad M_{xy} = \iiint_S z\delta(x,y,z)\,dV$$

$$M = \iiint_S \delta(x,y,z)\,dV\ .$$

M es la masa de S y M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} son los (primeros) momentos de S alrededor de los planos yz, xz y xy, resp.

Ejercicio. Calcular el centroide del hemisferio norte de una esfera de radio a.



$$M = \iiint_S \delta(x, y, z)\, dV = \iiint_S 1\, dV = Volume(S).$$

$$M = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_S z\delta(x, y, z)\, dV \\
&= \iiint_S z\, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\left(\int_0^a \rho^3\, d\rho\right) d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \tfrac{a^4}{4}\sin\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \tfrac{a^4}{8}\sin 2\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\tfrac{a^4}{16}\cos 2\phi\,\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{a^4}{8}\, d\theta \\
&= \frac{\pi a^4}{4},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}}$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \tfrac{3a}{8}\right)}$$