Ampliación de Matemáticas

Extremos de funciones de dos variables

Definición

Sea $f(x,y)$ una función real y (a,b) un punto del dominio de f.

f tiene un **máximo local** en (a,b) si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) de algún disco de radio positivo centrado en (a,b)

f tiene un **mínimo local** en (a,b) si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo (x,y) de algún disco de radio positivo centrado en (a,b)

Si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) del dominio de f, f tiene un **máximo global** en (a,b)

Si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo (x,y) del dominio de f, f tiene un **mínimo global** en (a,b)

Máximo, mínimo: Extremo

Extremo local: Extremo relativo

Extremo global: Extremo absoluto

Una condición necesaria para la existencia de extremo

Supongamos que (a,b) es un máximo local para f(x,y) y que f tiene derivadas parciales en (a,b).

f(a,b) es, pues, el mayor valor valor de f(x,y) cuando (x,y) se mueve -en cualquier dirección- en un disco centrado en (a,b).

En particular f(a,b) es el mayor valor de f en la dirección de x.

Es decir, la función de una variable g(x)=f(x,b) tiene un máximo local en x=a.

g'(a)=0

Como $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$ se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$

Análogamente, f(a,b) es el mayor valor de f en la cercanía de (a,b) en la dirección de y, de donde resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Teorema.

Sea f(x,y) una función real que admite derivadas parciales. Una condición <u>necesaria</u> para que f tenga un extremo local en (a,b) es que

grad(f)(a,b)= **0**

(el teorema también es cierto para funciones de 3 ó más variables)

Un punto (a,b) en el que el gradiente se anula se llama **punto crítico** de f.

Así que para encontrar los puntos críticos de f (supuesta la existencia de derivadas parciales) hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Ejemplo. (La condición es necesaria pero NO suficiente)
f(x,y)= xy en el punto (0,0)

Una condición suficiente para la existencia de extremos. Teorema

Sea f una función ... y (a,b) un punto crítico de f.

Sea

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$

Entonces

i) si D>0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$; f tiene mínimo local en (a,b)

ii) si D>0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$; f tiene máximo local en (a,b)

iii) si D<0: f tiene un punto de silla en (a,b)

iv) si D=0: el test no decide

Ejercicios

i) Encontrar los extremos de $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x$

ii) id. con $f(x,y) = xy-x^3-y^2$

iii) id. con $f(x,y) = (x-2)^4+(x-2y)^2$

iv) id. con $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{(-x^2-y^2)}$