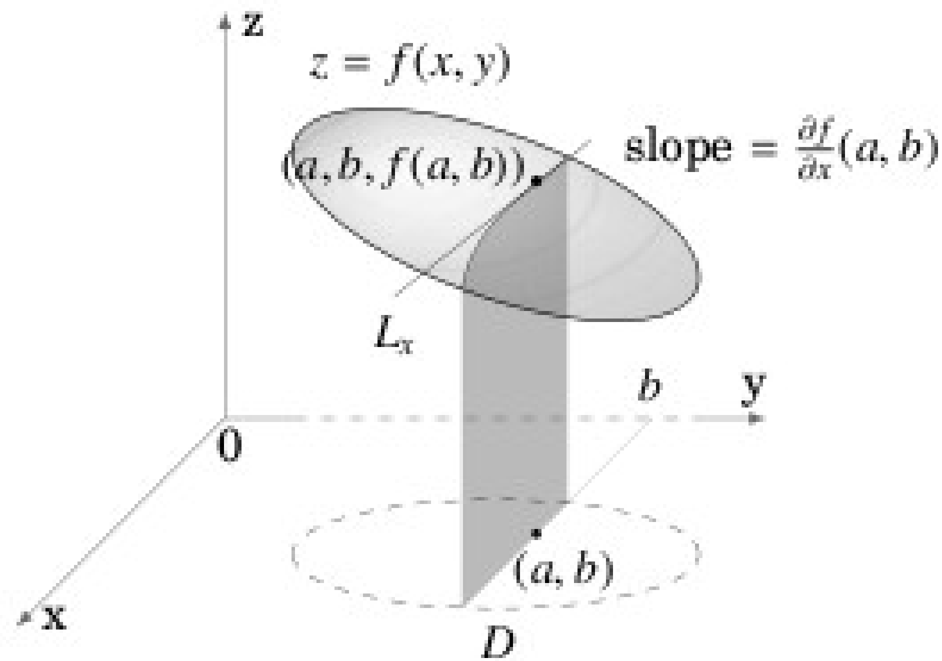
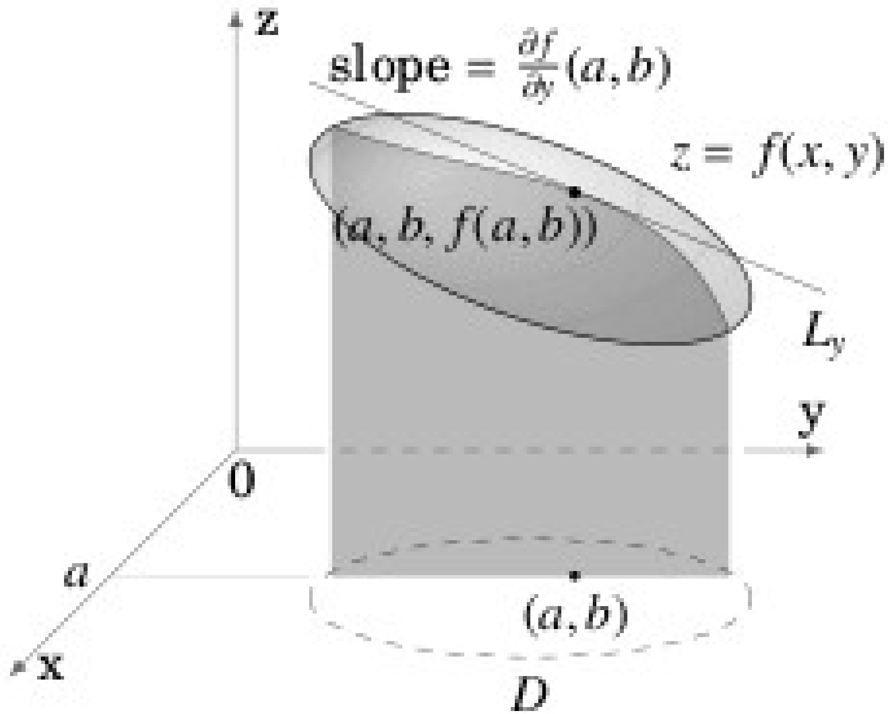
Ampliación de Matemáticas

Derivadas direccionales. Gradiente de una función real (o campo escalar)

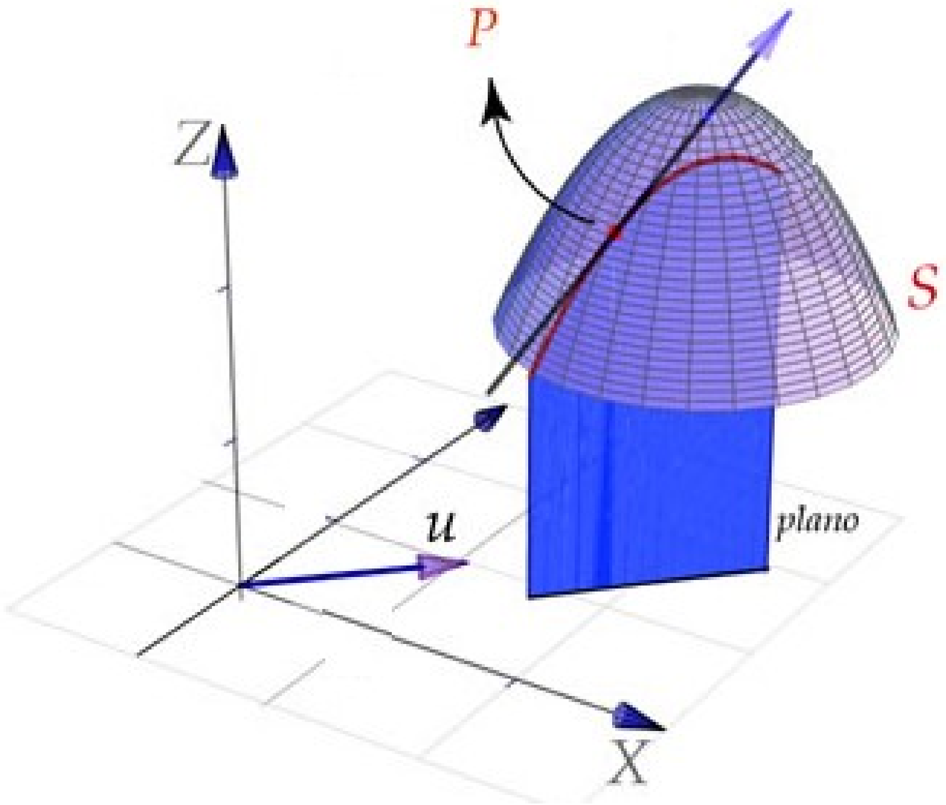
Tasa de cambio de f en dirección de x



Tasa de cambio de f en dirección de y



¿y en otra dirección?



Definición Derivada Direccional

Sean f(x,y) un función real definida en un dominio D contenido en R^2, (a,b) un punto de D y **v** un vector unitario de R^2. Se define la derivada direccional de f en (a,b) en la dirección de **v** como

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\mathbf{v}) - f(a,b)}{h}$$

Si **v** = (v_1, v_2)

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2) - f(a,b)}{h}$$

Recuérdese que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

es decir, si **v** = **i** = (1,0) resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{\mathbf{i}} f$$

Análogamente (¡escríbase!) si **v** = **j** = (0,1),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_{\mathbf{j}} f$$

Teorema

Sean f(x,y) un función real definida en un dominio D contenido en R^2 cuyas derivadas parciales existen y son continuas en D, (a,b) un punto de D y **v** un vector unitario de R^2. Entonces

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Nótese que $$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \mathbf{v}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

Gradiente RAE

Para una función real de dos variables f(x,y), el gradiente de f, grad(f) o ∇f es el vector de R^2

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Para una función real de tres variables f(x,y,z), el gradiente de f, grad(f) o ∇f, es el vector de R^3

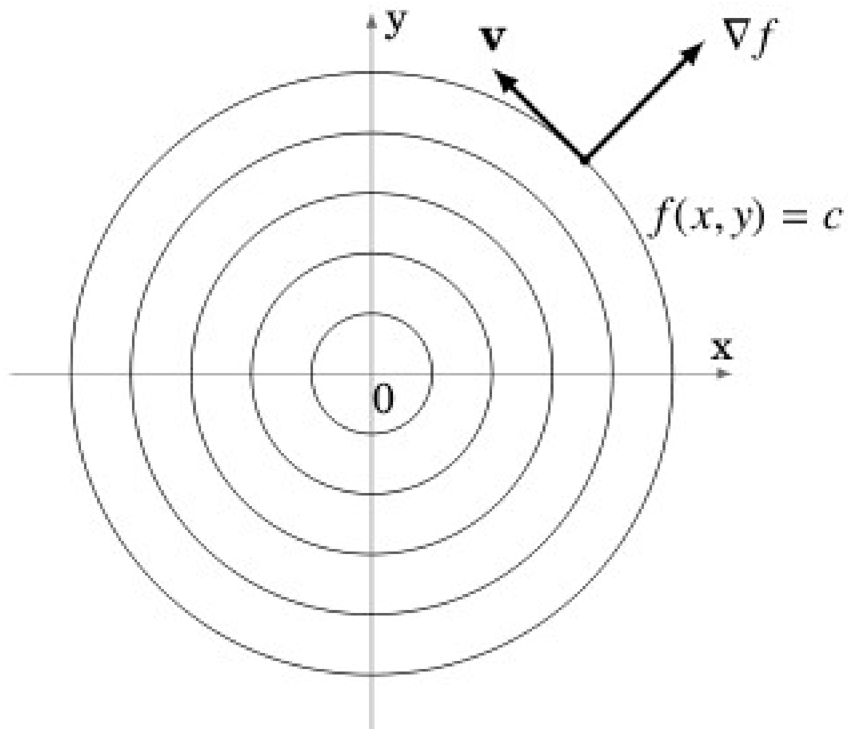
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Corolario $D_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v} \cdot \nabla f$

Ejercicio

Encontrar la derivada direccional de $f(x,y)= xy^2+x^3y$ en el punto $(1,2)$ en la dirección de $v=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$

pensando en el vector gradiente



f(x,y) continuamente diferenci
grad(f)≠0;
v vector unitario;
curva de nivel f(x,y)=c

$D_{\mathbf{v}}f$= ?

$$D_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f = \|\mathbf{v}\| \, \|\nabla f\| \cos\theta$$

$$D_{\mathbf{v}}f = \|\nabla f\| \cos\theta.$$

$$\nabla f \perp \mathbf{v}$$

$$D_{\mathbf{v}}f = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

seguimos pensando ...

$$D_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v} \cdot \nabla f = \|\mathbf{v}\| \, \|\nabla f\| \cos\theta$$

En un punto dado (a,b) grad(f) es un cierto valor fijo, y el valor de $D_{\mathbf{v}}f$ varía entonces conforme el ángulo Θ lo hace.

$D_{\mathbf{v}}f$ alcanza su máximo cuando cos Θ =1 (Θ =0°) y su valor mínimo cuando cos Θ =-1 (Θ =180°).

En otras palabras, f aumenta más rápido en la dirección de grad(f) y disminuye más rápido en la dirección de -grad(f).

Ejercicio

¿En qué dirección aumenta más rápidamente la función $f(x,y)= xy^2+x^3y$ desde el punto (1,2)? ¿Y en qué dirección decrece más rápidamente?

Otro ejercicio

Los últimos resultados son válidos para funciones reales de 3 o más variables. La derivada direccional de funciones tales puede ser evaluada también por la fórmula que multiplica escalarmente el vector **v** y el gradiente de la función en el punto.

La temperatura T de un sólido está dada por la función $T(x,y,z)=e^{-x}+e^{-2y}+e^{4z}$, donde x,y,z son las coordenadas relativas al centro del sólido. ¿En qué dirección a partir del punto (1,1,1) decrece la temperatura más rápidamente?